> 0

Studio del grafico della funzione

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x}$$

Insieme di definizione

Siamo in presenza di una funzione razionale fratta, quindi per determinare l'insieme di definizione dobbiamo imporre che il denominatore sia diverso da zero:

$$5x^2 + x \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x(5x+1) \neq 0 \;\Leftrightarrow\; x \neq 0 \text{ e } x \neq -\frac{1}{5}$$

La funzione è dunque definita per $x \in \left(-\infty, -\frac{1}{5}\right) \cup \left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup (0, +\infty)$

Segno della funzione

$$f(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 + 2x - 3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -1 \pm \sqrt{4} \;\Leftrightarrow\; x = -3 \text{ e } x = 1$$

$$f(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{x^2 + 2x - 3}{5x^2 + x} > 0 \quad\Leftrightarrow\quad \begin{array}{ll} x^2 + 2x - 3 > 0 & \qquad x < -3;\; x > 1 \\ 5x^2 + x > 0 & \qquad x < -\frac{1}{5};\; x > 0 \end{array}$$

$$\forall x \in (-\infty, -3) \cup \left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup (1, +\infty)$$

$$f(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; \qquad \forall x \in \left(-3, -\frac{1}{5}\right) \cup (0, 1)$$

Andamento agli estremi del dominio

Per determinare eventuali asintoti calcoliamo i limiti agli estremi degli intervalli di definizione.

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2+2x-3}{5x^2+x}=\frac{1}{5}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^2+2x-3}{5x^2+x}=\frac{1}{5}$$

La retta $y=\frac{1}{5}$ è dunque un asintoto orizzontale per f(x).

$$\lim_{x\to-\frac{1}{5}^-}\frac{x^2+2x-3}{5x^2+x}=\frac{-\frac{84}{25}}{0^+}=-\infty$$

$$\lim_{x\to-\frac{1}{5}^+}\frac{x^2+2x-3}{5x^2+x}=\frac{-\frac{84}{25}}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^+}\frac{x^2+2x-3}{5x^2+x}=\frac{-3}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to0^-}\frac{x^2+2x-3}{5x^2+x}=\frac{-3}{0^+}=-\infty$$

Le rette $x=-\frac{1}{5}$ e $x=0$ risultano essere asintoti verticali per f(x).

Massimi e minimi. Crescenza e descrescenza

Calcoliamo la derivata prima:

$$f'(x)=\frac{(2x+2)(5x^2+x)-(10x+1)(x^2+2x-3)}{(5x^2+x)^2}=$$

$$\frac{10x^3+2x^2+10x^2+2x-10x^3-20x^2+30x-x^2-2x+3}{(5x^2+x)^2}=\frac{-9x^2+30x+3}{(5x^2+x)^2}$$

$$f'(x)=0\ \Leftrightarrow\ -9x^2+30x+3=0\ \Leftrightarrow\ 3x^2-10x-1=0\ \Leftrightarrow\ x=\frac{5\pm\sqrt{28}}{3}$$

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; -9x^2 + 30x + 3 > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{5-\sqrt{28}}{3} < x < \frac{5+\sqrt{28}}{3}$$

$$f'(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; -9x^2 + 30x + 3 < 0 \;\Leftrightarrow x < \frac{5-\sqrt{28}}{3} \text{ e } x > \frac{5+\sqrt{28}}{3}$$

La funzione risulta essere crescente nell'intervallo $\left(\frac{5-\sqrt{28}}{3}, \frac{5+\sqrt{28}}{3}\right)$ e decrescente nell'intervallo $\left(+\infty, \frac{5-\sqrt{28}}{3}\right) \cup \left(\frac{5+\sqrt{28}}{3}, +\infty\right)$.
Il punto $x = \frac{5-\sqrt{28}}{3}$ è un punto di minimo, mentre il punto $x = \frac{5+\sqrt{28}}{3}$ è un punto di massimo.

Concavità, convessità e flessi

Per stabilire se la funzione è concava o convessa e per determinare eventuali flessi calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(-18x+30)(5x^2+x)^2 - 2(5x^2+x)(10x+1)(-9x^2+30x+3)}{(5x^2+x)^4} =$$

$$\frac{-90x^3 - 18x^2 + 150x^2 + 30x + 180x^3 - 600x^2 - 60x + 18x^2 - 60x - 6}{(5x^2+x)^3} =$$

$$\frac{90x^3 - 450x^2 - 90x - 6}{(5x^2+x)^3} = \frac{6(15x^3 - 75x^2 - 6x - 1)}{(5x^2+x)^3}$$

$$f''(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6(15x^3 - 75x^2 - 6x - 1)}{(5x^2+x)^3} = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 5.19$$

La funzione presenta un punto di flesso in $x = 5.19$

$$f''(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6(15x^3 - 75x^2 - 6x - 1)}{(5x^2+x)^3} > 0 \;\Leftrightarrow\; -\frac{1}{5} < x < 0 \;\cup\; x > 5.19$$

La funzione risulta convessa per $x \in \left(-\frac{1}{5}, 0\right) \cup (5.19, +\infty)$

$$f''(x) < 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{6(15x^3 - 75x^2 - 6x - 1)}{(5x^2+x)^3} < 0 \;\Leftrightarrow\; x < -\frac{1}{5} \;\cup\; 0 < x < 5.19$$

La funzione risulta concava per $x < -\frac{1}{5} \;\cup\; 0 < x < 5.19$

Grafico della funzione