

Studiare la funzione

$$f(x) = x \ln \ln x$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita per x tale che $\ln x > 0$, cioè $x > 1$, per cui

$$X = (1, +\infty)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e \implies (1, 0) \in \gamma,$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1^+ \cdot \ln 0^+ = -\infty,$$

cosicché la retta $x = 1$ è asintoto verticale a sinistra.

Comportamento all'infinito:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

Vediamo se esiste un asintoto obliquo:

$$m = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \ln x = +\infty$$

per cui γ è privo di asintoto obliquo a destra.

Derivate

$$f'(x) = \frac{\ln x \cdot \ln \ln x + 1}{\ln x}$$
$$f''(x) = \frac{\ln x - 1}{x \ln^2 x}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) > 0$$

Quindi la funzione è strettamente crescente.

Concavità e punti di flesso.

Zeri di f'' :

$$f''(x) = 0 \iff x = e$$

Segno di f'' :

$$f''(x) > 0 \iff x \in (e, +\infty),$$

pertanto γ è concavo verso l'alto in $(e, +\infty)$

Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (66).

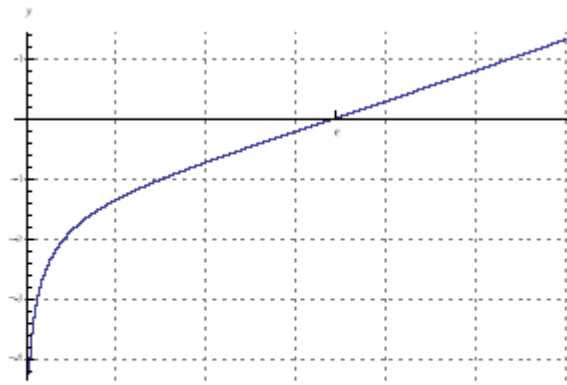


Figure 66: Grafico della funzione $f(x) = x \ln \ln x$