(7) $f(x) = e^{-x}\sqrt{|x-1|}$

- **Dominio** $= \mathbb{R}$
- **Segno**: $e^{-x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

  $|x-1| > 0 \quad \forall x \neq 1$

$\Rightarrow$ $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$f(x) = 0 \quad x = 1$

$f(x) < 0$ impossibile

- **Intersezione con gli assi**

$\vec{x} \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \vec{y} \begin{cases} y = e^{-0}\sqrt{1} = 1 \\ x = 0 \end{cases} \qquad \Rightarrow \quad A(1,0) \quad B(0,1)$

- **Asintoti**

Asintoti orizzontali

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{-x}\sqrt{(x-1)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x-1}}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^x\sqrt{x-1}} = 0$$

$y = 0$ ASINTOTO ORIZZONTALE DX

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} e^{-x}\sqrt{1-x} = +\infty$$

Non ci sono asintoti orizzontali SX

Asintoti obliqui

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}\sqrt{1-x}}{x}$$

Applicando il teorema di DE L'HOPITAL si ha:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{e^{-x}(-1)}{1} = -\infty \quad \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$$

Non esistono asintoti obliqui

ASINTOTI VERTICALI: NON CE NE SONO perché $D = \mathbb{R}$ e non ci sono punti di DISCONTINUITÀ

$$f'(x)\begin{cases} -e^{-x}\sqrt{x-1} + \dfrac{1}{2\sqrt{x-1}}\,e^{-x} = -e^{-x}\left[\dfrac{2(x-1)-1}{2\sqrt{x-1}}\right] & x \geq 1 \\ -e^{-x}\sqrt{1-x} + \dfrac{1}{2\sqrt{1-x}}\,(-1)\,e^{-x} = -e^{-x}\left[\dfrac{2(1-x)+1}{2\sqrt{1-x}}\right] & x \leq 1 \end{cases}$$

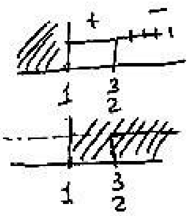
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x-1}}\left[-2x+2+1\right] & x \geq 1 \\ \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1-x}}\left[-2+2x-1\right] & x \leq 1 \end{cases}$$

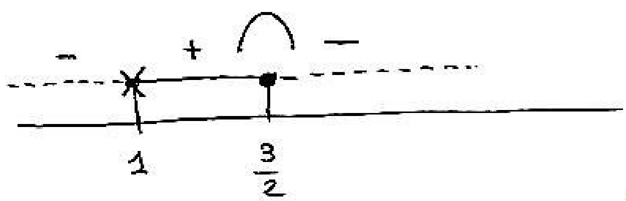
$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{x-1}}\,(3-2x) & x \geq 1 \\ \dfrac{e^{-x}}{2\sqrt{1-x}}\,(2x-3) & x \leq 1 \end{cases}$$

Per la positività del primo fattore si ha:

se $x \geq 1$ $\quad f'(x) > 0 \Rightarrow 3-2x > 0 \quad x < \frac{3}{2}$

se $x \leq 1$ $\quad f'(x) > 0 \Rightarrow 2x-3 > 0 \quad x > \frac{3}{2}$





$\lim_{x \to 1^+} f'(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to 1^-} f'(x) = -\infty \Rightarrow$ la funzione non è derivabile nel punto 1

Il punto 1 è un pto a tangente verticale. In questo caso è CUSPIDE

$\Rightarrow f'(x) > 0 \qquad 1 < x < \frac{3}{2}$ CRESCENTE

$f'(x) < 0 \qquad x < 1 \vee x > \frac{3}{2}$ DECRESCENTE

$f'(x) = 0 \qquad x = \frac{3}{2}$ PTO CRITICO

Siccome nel punto $\frac{3}{2}$ passando da sinistra a destra il segno della $f'(x)$ cambia ed è continua la funzione si ha in tale punto un punto di max

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = e^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{3}{2}-1} = e^{-\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0,16$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{\left[e^{-x}(-1)(3-2x)+(-2)e^{-x}\right]\cdot 2\sqrt{x-1} - \cancel{2}\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{x-1}}e^{-x}(3-2x)}{\left(2\sqrt{x-1}\right)^2} & x>1 \\ \dfrac{\left[e^{-x}(-1)(2x-3)+2e^{-x}\right]2\sqrt{1-x} - \cancel{2}\dfrac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x}}(-1)e^{-x}(2x-3)}{\left[2\sqrt{1-x}\right]^2} & x<1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{\left[e^{-x}(-3+2x) - 2e^{-x}\right]\cdot 2(x-1) - (3-2x)e^{-x}}{4(x-1)\sqrt{x-1}} & x>1 \\ \dfrac{\left[e^{-x}(-2x+3)+2e^{-x}\right]2(1-x)+(2x-3)e^{-x}}{4(1-x)\sqrt{1-x}} & x<1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}\left[(-3+2x-2)(2x-2)-3+2x\right]}{4(x-1)(\sqrt{x-1})} & x>1 \\ \dfrac{e^{-x}\left[(-2x+3+2)(2-2x)+2x-3\right]}{4(1-x)\sqrt{1-x}} & x<1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{4(x-1)\sqrt{x-1}}\left[\underline{-6x}+6+4x^2\underline{-4x}-\underline{4x}+4-3+\underline{2x}\right] & x>1 \\ \dfrac{e^{-2x}}{4(1-x)\sqrt{1-x}}\left[\underline{-4x}+4x^2+6-\underline{6x}+4-\underline{4x}+\underline{2x}-3\right] & x<1 \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{-x}}{4(x-1)\sqrt{x-1}} \left(4x^2-12x+7\right) & x > 1 \\[2ex] \dfrac{e^{-x}}{4(1-x)\sqrt{1-x}} \left(4x^2-12x+7\right) & x < 1 \end{cases}$$

Per lo studio del segno, poiché il primo fattore è sempre positivo, basta considerare il trinomio di II grado

$$4x^2-12x+7>0 \qquad \frac{\Delta}{4} = 36-28 = 8$$

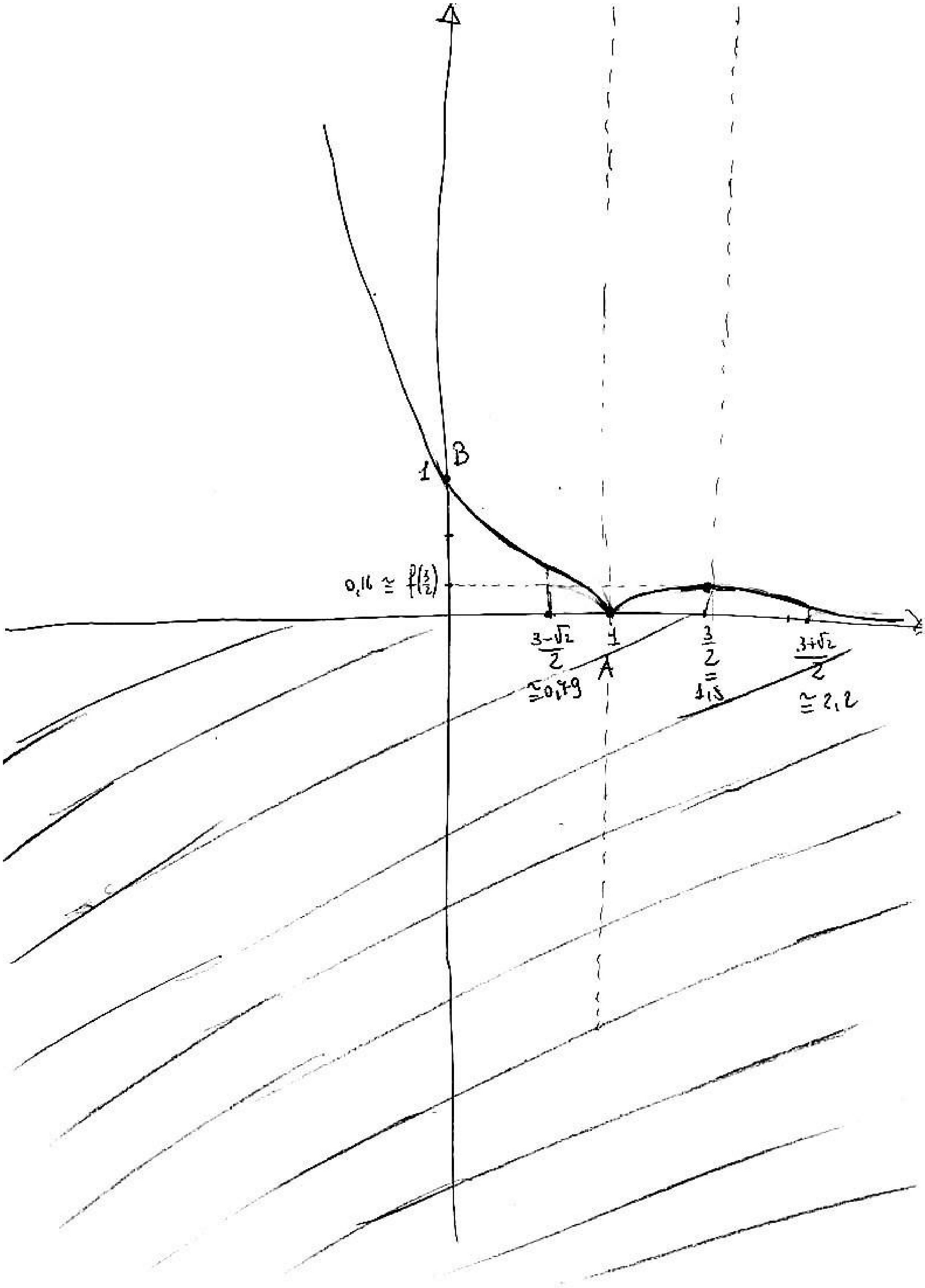
$$x = \frac{6 \pm \sqrt{8}}{4} = \frac{6 \pm 2\sqrt{2}}{4} = \frac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$$

$\Rightarrow$ $f''(x) > 0$ $\qquad x < \dfrac{3-\sqrt{2}}{2} \ \vee \ x > \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ CONCAVITA' VERSO L'ALTO

$f''(x) < 0$ $\qquad \dfrac{3-\sqrt{2}}{2} < x < \dfrac{3+\sqrt{2}}{2}$ CONCAVITA' VERSO BASSO

$f''(x) = 0$ $\qquad x = \dfrac{3 \pm \sqrt{2}}{2}$ $\qquad \dfrac{3-\sqrt{2}}{2} \simeq 0{,}79$

$\dfrac{3+\sqrt{2}}{2} \simeq 2{,}21$



B
1
0,16 ≃ f(3/2)
(3−√2)/2
≃ 0,79
1
A
3/2
=
1,5
(3+√2)/2
≃ 2,2