Studio della funzione:
$$y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$$
La funzione è pari in quanto
$$y(-x) = \ln\left(\frac{1}{(-x)^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = y(x)$$
e, quindi, simmetrica rispetto all'asse delle ordinate.

Dominio (insieme di definizione) della funzione

Il dominio D della funzione coincide con le soluzioni della disequazione
$$\frac{1}{x^2} > 0 \Longleftrightarrow x \neq 0$$
cosicché $D = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.

Segno ed intersezioni con gli assi

Per stabilire il segno della funzione, risolviamo, compatibilmente col dominio, la disequazione
$$y(x) \geq 0 \Longleftrightarrow \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) \geq 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{x^2} \geq 1 \Longleftrightarrow -1 \leq x < 0 \vee 0 < x \leq 1$$
cosicché

- $y(x) = 0$ per $x = -1 \vee x = 1$;
- $y(x) > 0$ per $x \in (-1, 0) \cup (0, 1)$;
- $y(x) < 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

I punto $A(-1, 0)$ e $B(1, 0)$ rappresentano le intersezione con l'asse delle ascisse mentre la funzione non interseca l'asse delle ordinate poiché $0 \notin D$..

Limite agli estremi di D ed eventuali asintoti

Tenendo conto dell'osservazione 1 si ha:
$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = \ln\left(\frac{1}{0^+}\right) = -\infty = \lim_{x \to -\infty} y(x)$$
$$\lim_{x \to 0^+} y(x) = \lim_{x \to 0^+} \ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = +\infty = \lim_{x \to 0^-} y(x)$$
cosicché la retta $x = 0$ (asse delle ordinate) è un asintoto verticale mentre non sono presenti asintoti orizzontali.

Studio di y' e dei punti stazionari

La derivata prima della funzione è data da

$$y' = \frac{1}{1/x^2}\left(\frac{1}{x^2}\right)' = -x^2\frac{2}{x^3}$$

e, quindi, da

$$y' = -\frac{2}{x}$$

Risulta $y' \neq 0 \; \forall\, x \in D$ per cui la funzione non possiede punti stazionari.

Inoltre, la disequazione $y' > 0$ è risolta per $x < 0$ cosicché

- $y' > 0 \; \forall\, x \in I_1 = (-\infty, 0)$ ed ivi la funzione è crescente;
- $y' < 0 \; \forall\, x \in I_2 = (0, +\infty)$ ed ivi la funzione è decrescente.

Studio della derivata seconda: concavità e convessità

Per le informazioni trovate finora e per l'osservazione 1, possiamo affermare che la funzione volge la concavità verso l'alto sia sull'insieme I_1 sia sull'insieme I_2.

Allo stesso risultato si perviene studiando il segno di

$$y'' = \frac{2}{x^2}$$

Il grafico di questa funzione è quello di fig. 5.

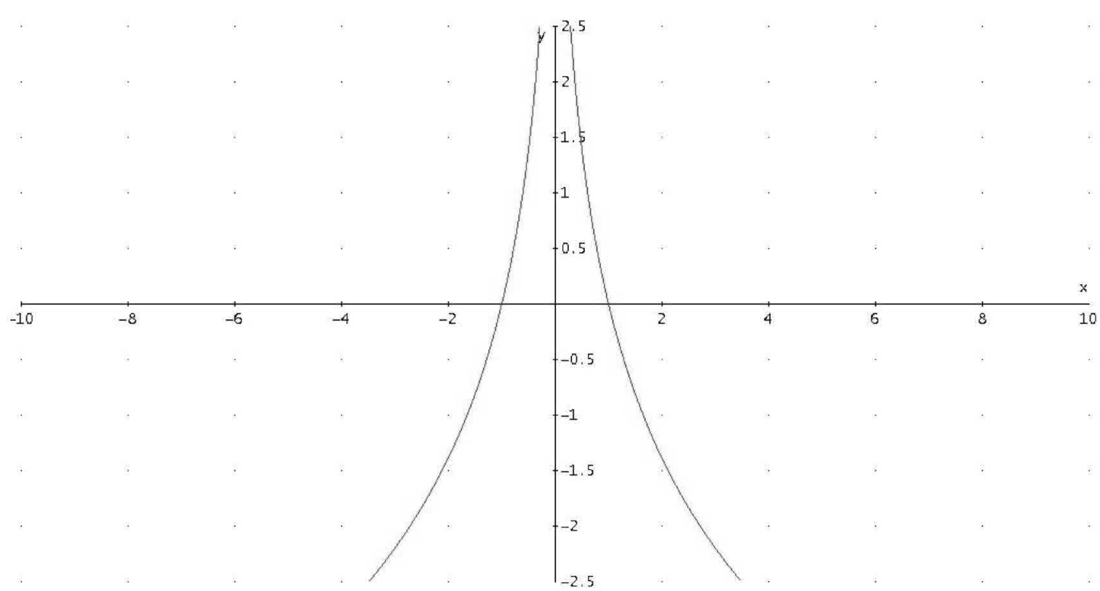

Figura 5: grafico della funzione $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$