

Studio di:

$$y = \sqrt{x^2 + x}$$

Dominio (insieme di definizione) della funzione

La funzione è irrazionale per cui va imposto, per determinare il suo insieme di definizione, l'argomento della radice quadrata sia non negativo:

$$x^2 + x \geq 0 \iff x \leq -1 \vee x \geq 0$$

cosicché $D = (-\infty, -1] \cup [0, +\infty)$.

Segno ed intersezioni con gli assi

La funzione è sempre non negativa su D essendo irrazionale con radice di indice pari ed, in particolare,

- $y(x) = 0$ per $x = -1$ e per $x = 0$;
- $y(x) > 0$ per $x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$.

Il punto $A(0, 0)$ rappresenta l'intersezione con entrambi gli assi coordinati mentre il punto $B(-1, 0)$ solo con l'asse delle ascisse.

Limite agli estremi di D ed eventuali asintoti

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + x} = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$$

e, dunque, la funzione non possiede asintoti orizzontali. La funzione non possiede neppure asintoti verticali dato che i punti di ascissa 0 stanno in D come già verificato. Stabiliamo, dunque, se la funzione possiede asintoti obliqui. Osserviamo che

$$\sqrt{x^2 + x} = |x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}$$

per cui risulta

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = -1 = m_1;$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}}{x} = 1 = m_2$$

per cui la funzione ammette due asintoti obliqui dati dalle rette

$$r_1 : y = m_1x + q_1 \text{ ed } r_2 : y = m_2x + q_2$$

dove m_1, m_2 sono quelli appena determinati e q_1, q_2 si calcolano come

$$\begin{aligned} q_1 &= \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x) - m_1x = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + x} + x) \frac{\sqrt{x^2 + x} - x}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x} = \\ &\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 \right)} = - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1} = -1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} q_2 &= \lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) - m_2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + x} - x) \frac{\sqrt{x^2 + x} + x}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + x - x^2}{\sqrt{x^2 + x} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + x} = \\ &\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x \left(\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} + 1} = 1 \end{aligned}$$

cosicché gli asintoti obliqui coincidono con le rette

- $y = -x - 1$;
- $y = x + 1$.

Studio di y' e dei punti stazionari

La derivata prima della funzione è data da:

$$y' = \frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}}$$

che, uguagliata a zero, conduce a

$$\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} = 0 \iff 2x + 1 = 0 \iff x = -1/2$$

Poiché $-1/2 \notin D$, la funzione non ammette punti stazionari.

Stabiliamo, comunque, il segno della derivata per determinare gli intervalli di monotonia di

La disequazione $y' > 0$ ovvero

$$\frac{2x + 1}{2\sqrt{x^2 + x}} > 0$$

ha per soluzione $x > -1/2$ e, compatibilmente col dominio, si ha:

- $y' > 0 \forall x \in I_1 = [0, +\infty)$;
- $y' < 0 \forall x \in I_2 = (-\infty, -1]$.

Ne segue che la funzione possiede è crescente sull'insieme I_1 mentre è decrescente sull'insieme

Studio della derivata seconda: concavità e convessità

Notiamo che, per quanto finora stabilito (segno, comportamento per $x \rightarrow \pm\infty$, asintoti obliqui, intervalli di monotonia), possiamo affermare che la funzione volge la concavità verso il basso in ciascuno degli intervalli I_1 ed I_2 precedentemente definiti la cui unione coincide con il D.dominio

Allo stesso risultato si perviene studiando il segno della derivata seconda

$$y'' = \frac{4x^2 + 4x - 1}{4(x^2 + x)\sqrt{x^2 + x}}$$

Il grafico di questa funzione è quello di fig. 3.

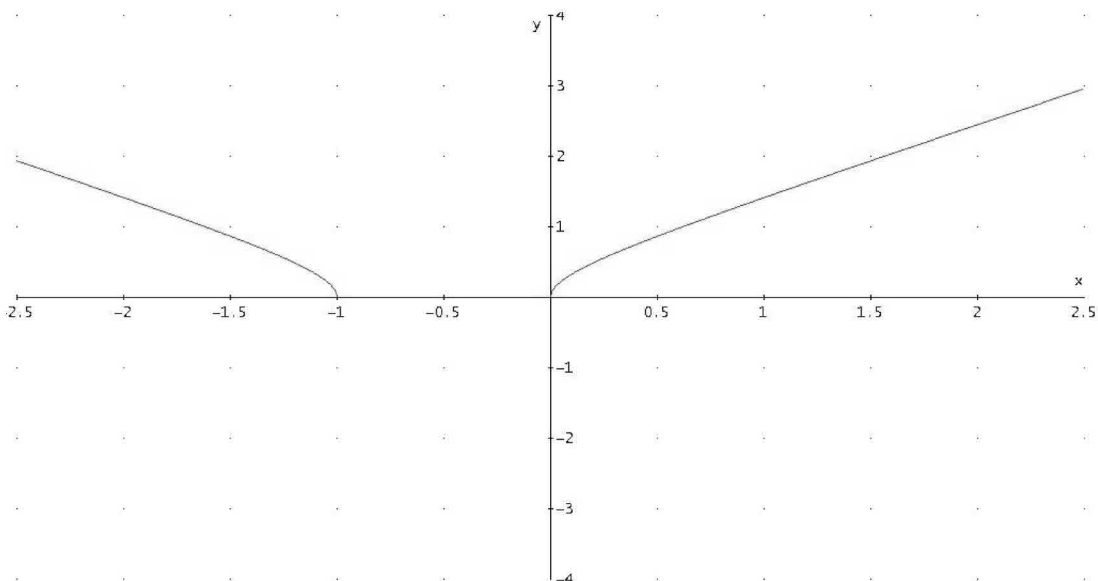


Figura 3: grafico della funzione $y = \sqrt{x^2 + x}$