

Studio della funzione:

$$y = \frac{x^3}{x+1}$$

Dominio (insieme di definizione) della funzione

La funzione è razionale fratta per cui va imposto, per determinare il suo insieme di ~~Definizione~~ denominatore sia non nullo:

$$x + 1 \neq 0 \iff x \neq -1$$

Ne segue $D = (-\infty, -1) \cup (-1, +\infty)$.

Segno ed intersezioni con gli assi

Per studiare il segno risolviamo la disequazione

$$y(x) \geq 0 \implies \frac{x^3}{x+1} \geq 0 \iff x \leq -1 \vee x \geq 0$$

Ne segue che

- $y(x) > 0 \forall x \in (-\infty, -1) \cup (0, +\infty)$;
- $y(x) = 0$ per $x = 0 \vee x = 4$;
- $y(x) < 0 \forall x \in (-1, 0)$.

Il punto $P(0, 0)$ rappresenta l'intersezione con entrambi gli assi coordinati.

Limite agli estremi di D ed eventuali asintoti

Risulta:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} y(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x} = +\infty = \lim_{x \rightarrow -\infty} y(x)$$

e, dunque, la funzione non possiede asintoti orizzontali;

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} y(x) = +\infty \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} y(x) = -\infty$$

per cui non esiste

$$\lim_{x \rightarrow -1} y(x)$$

ma la funzione possiede lo stesso l'asintoto verticale dato dalla retta

$$x = -1$$

La funzione non possiede asintoti obliqui poiché, com'è evidente,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \pm\infty$$

Studio di y' e dei punti stazionari

La derivata prima della funzione è data da:

$$y' = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$$

che, uguagliata a zero, conduce a

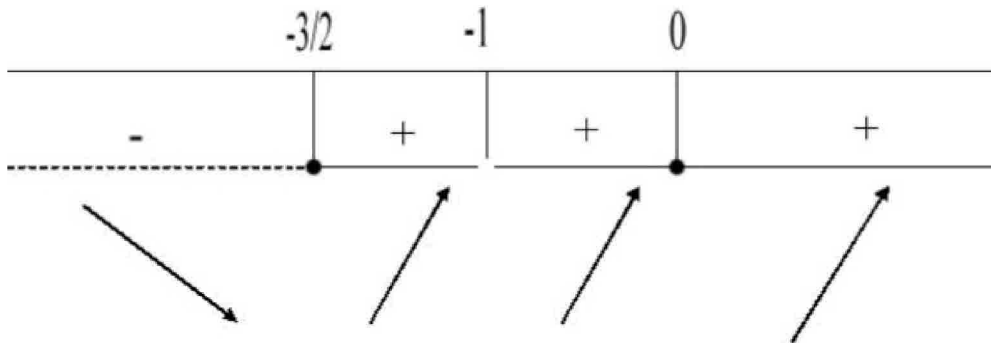
$$\begin{aligned} \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} &\iff 2x^3 + 3x^2 = 0 \iff x^2(2x+3) = 0 \\ &\iff x^2 = 0 \vee 2x+3 = 0 \iff x = 0 \vee x = -\frac{3}{2} \end{aligned}$$

Ne segue che la funzione possiede due punti stazionari di ascissa $x = 0$ (e ordinata $y = 0$) ed $x = -3/2$ (con ordinata $y = \frac{(-3/2)^3}{-3/2+1} = \frac{27}{4}$).

Studiamo, adesso, il segno di y' risolvendo la disequazione algebrica

$$\frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2} > 0 \iff 2x^3 + 3x^2 > 0 \iff x^2(2x+3)$$

Risolviendo separatamente le due disequazioni del prodotto ed eseguendo, successivamente, il prodotto dei segni si ha:



che, compatibilmente col dominio, rappresenta il segno di y' (le frecce indicano dove la funzione è crescente o decrescente, i cerchi dove è $y' = 0$ e $x = -1$ è saltato poichè non fa parte del dominio):

Da ciò si deduce che

- $y(x)$ è crescente per $-3/2 < x < -1$, per $-1 < x < 0$ e per $x > 0$;
- $y(x)$ è decrescente per $x < -3/2$;
- $y(x)$ ha un minimo per $x = -3/2$ ed un flesso a tangente orizzontale ascendente per $x = 0$: tali punti sono, rispettivamente, $M(-3/2, 27/4)$; $F(0, 0)$.

Studio della derivata seconda: concavità e convessità

Risulta:

$$y'' = \frac{2x^3}{(x+1)^3}$$

ed

$$y'' = 0 \iff 2x^3 = 0 \iff x = 0$$

ritrovando il flesso già individuato mediante lo studio di y' .

Risultava $y'' > 0$ per $x < 0 \vee x > 2$ ed ivi la funzione volge la concavità verso l'alto mentre per $0 < x < 2$ dove la funzione volge la concavità verso il basso.

Riepilogando:

- la funzione è convessa per $x \in (-\infty, 0)$ e per $x \in (2, +\infty)$;
- la funzione è concava per $x \in (0, 2)$;
- possiede i punti di flesso $F(0, 0)$, $F_2(2, -16)$.

Il grafico di questa funzione è quello di fig. 2.

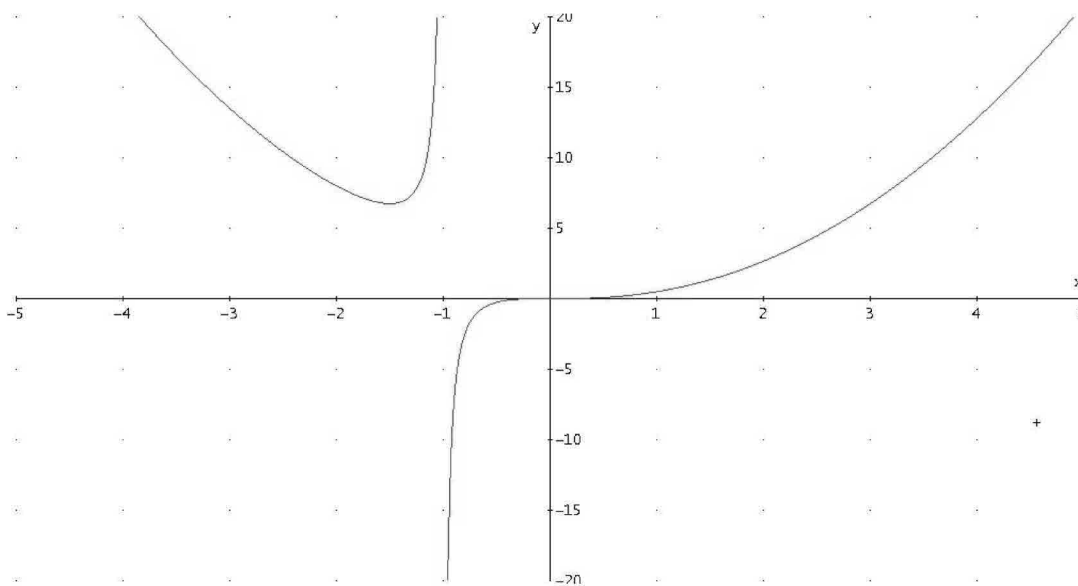


Figura 2: grafico della funzione $y = \frac{x^3}{x+1}$