Studio della funzione:

$$y = x^4 - 4x^3$$

Dominio (insieme di definizione) della funzione

Poichè i polinomi non sono soggetti ad alcuna limitazione, si ha che il D **dominio** della funzione è dato da $D = \mathbb{R}$.

Segno ed intersezioni con gli assi

Per studiare il segno risolviamo la disequazione

$$y(x) \geq 0 \Longrightarrow x^4 - 16x^3 \geq 0 \Longleftrightarrow x^3(x-4) \geq 0 \Longleftrightarrow x \leq 0 \vee x \geq 4$$

Ne segue che

- $y(x) > 0 \ \forall \ x \in (-\infty, 0) \cup (4, +\infty)$;
- $y(x) = 0$ per $x = 0 \vee x = 4$;
- $y(x) < 0 \ \forall \ x \in (0, 4)$.

Il punto $P(0,0)$ rappresenta l'intersezione con entrambi gli assi coordinati mentre $Q(4,0)$ è d'intersezione con l'asse delle ascisse.

Limite agli estremi di D

Risulta, tenendo presente che in un polinomio predomina il termine di grado massimo,

$$\lim_{x \to +\infty} y(x) = \lim_{x \to +\infty} x^4 = +\infty = \lim_{x \to -\infty} y(x)$$

Studio di y' e dei punti stazionari

La derivata prima della funzione è data da:

$$y' = 4x^3 - 48x^2$$

che, uguagliata a zero, conduce a

$$4x^3 - 12x^2 \Longleftrightarrow 4x^2(x-3) = 0 \Longleftrightarrow 4x^2 = 0 \vee x - 3 = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \vee x = 3$$

Ne segue che la funzione possiede due punti stazionari di ascissa $x = 0$ (e ordinata $y = 0$) ed $x = 3$ (con ordinata $y = 3^4 - 16 \cdot 3^3 = 81 - 108 = -27$).

Studiamo, adesso, il segno di y' risolvendo la disequazione algebrica

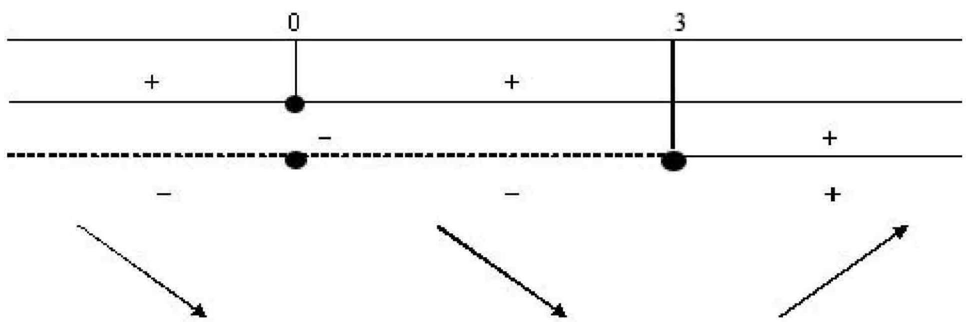
$$4x^3 - 12x^2 > 0 \iff 4x^2(x-3) > 0$$

Risolviamo separatamnete le due disequazioni del prodotto e, successivamente facciamo il prodotto dei segni per stabilire il segno di y'

$$4x^2 > 0 \ \forall \ x \neq 0$$

$$x - 3 > 0 \text{ per } x > 3$$

Nel grafico seguente viene effettuato il prodotto dei segni ed evidenziato quello di y' (le frecce indicano dove la funzione y è crescente o decrescente, i cerchi dove y' è nulla).



Dunque, la funzione è decrescente per $x < 0 \vee x > 0$ mentre è crescente per $x > 3$ cosicché, per $x = 0$, essa ammette un punto di flesso a tangente orizzontale dato da $F(0,0)$ mentre, per $x = 3$, possiede un minimo relativo dato da $M(3,-27)$.

Studio della derivata seconda: concavità e convessità

Risulta:

$$y'' = 12x^2 - 24x$$

ed

$$y'' = 0 \iff 12x^2 - 24x = 0 \iff x^2 - 2x = 0 \iff x(x-2) = 0 \iff x = 0 \vee x = 2$$

Dunque, la funzione cambia concavità per $x = 0$ (come già stabilito studiando y') ed $x = 2$ che, appartendendo al dominio, è l'ascissa di un punto di flesso a tangente obliqua dato da $F_2(2, y(2))$ ovvero da $F_2(2, -16)$.

Risulta $y'' > 0$ per $x < 0 \vee x > 2$ ed ivi la funzione volge la concavità verso l'alto mentre $y'' < 0$ per $0 < x < 2$ dove la funzione volge la concavità verso il basso.

Riepilogando:

- la funzione è convessa per $x \in (-\infty, 0)$ e per $x \in (2, +\infty)$;
- la funzione è concava per $x \in (0, 2)$;
- possiede i punti di flesso $F(0,0)$, $F_2(2, -16)$.

Il grafico di questa funzione è riportato in figura 1.

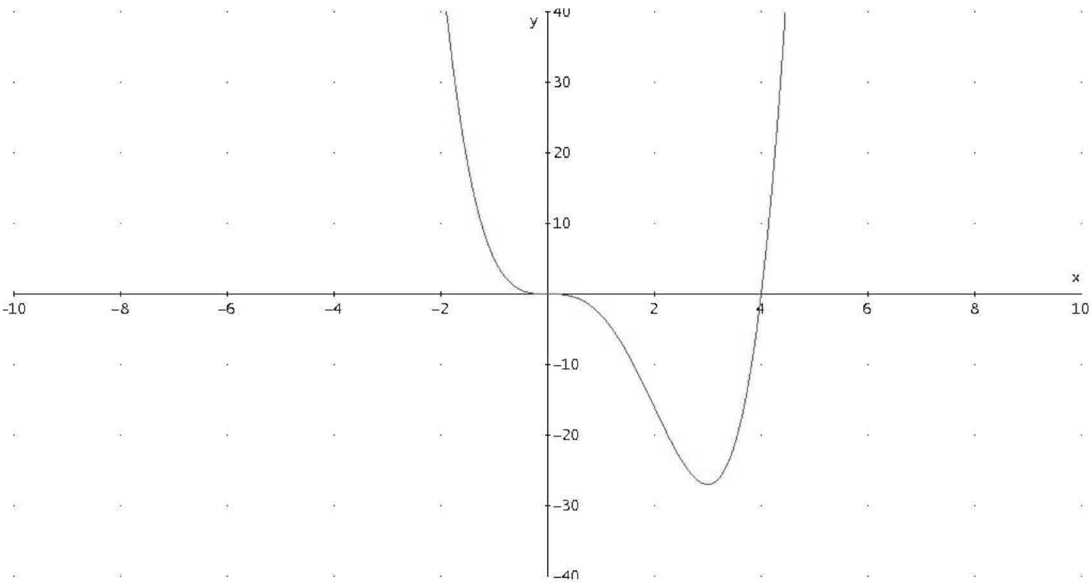


Figura 1: grafico della funzione $y = x^4 - 16x^3$