3. Studiare la funzione:

$$y = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$$

$D: \mathbb{R}$

Intersezione con gli assi

$\begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\quad O = (0; 0)$

$\begin{cases} y = 0 \\ y = \dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ e^x - 1 = 0 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ e^x = 1 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$

Segno della funzione

$\dfrac{e^x - 1}{e^x + 1} > 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} e^x - 1 > 0 \\ e^x + 1 > 0 \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} e^x > 1 \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{array}\right.$

(grafico)

$f(x) > 0 \quad \forall\, x > 0$

$f(x) < 0 \quad \forall\, x < 0$

Limiti agli estremi del campo di definizione

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = \frac{-1}{+1} = -1 \quad \rightarrow \quad y = -1 \ a.o.$$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x - 1}{e^x + 1} = 1 \quad \rightarrow \quad y = 1 \ a.o.$$

Derivata prima

$$f'(x) = \frac{e^x(e^x - 1) - e^x(e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{e^x(e^x + 1 - e^x + 1)}{(e^x + 1)^2} = \frac{2e^x}{(e^x + 1)^2}$$

$f'(x) \geq 0 \quad \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2} \geq 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$

$f(x)$ è sempre crescente.

Derivata seconda

$$f''(x) = \frac{2[e^x(e^x+1) - 2e^x(e^x+1)e^x]}{(e^x+1)^4} \rightarrow$$

$$f''(x) = \frac{2e^x(e^x+1)(1-2e^x)}{(e^x+1)^4} \geq 0$$

$1 - 2e^x \geq 0 \qquad e^x \leq \frac{1}{2}$

$x \leq \ln\left(\frac{1}{2}\right)$

$$F\left(\ln\frac{1}{2}; \frac{-\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}\right) \equiv \left(\ln\frac{1}{2}; -\frac{1}{3}\right)$$