2. Studiare la funzione:

$$y = \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$$

Dominio

$\frac{x-1}{x+1} > 0 \qquad \left[\begin{array}{l} x-1>0 \\ x+1>0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x>-1 \end{array}\right.$

$$D: (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$$

Intersezione con gli assi cartesiani.

Intersezione con l'asse delle ascisse:

$\begin{cases} y=0 \\ y=\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \log\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ \frac{x-1}{x+1}=1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \frac{x-1}{x+1}-1=0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=0 \\ \frac{x-1-x-1}{x+1}=0 \end{cases}$

$\begin{cases} y=0 \\ \frac{-2}{x+1}=0 \end{cases} \quad \emptyset$

Non ci sono soluzioni, pertanto $f(x)$ non interseca l'asse delle ascisse.

$f(x)$ non interseca l'asse delle ordinate poiché non esiste tra -1 e 1.

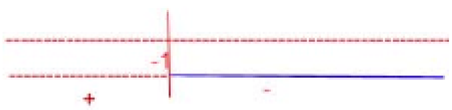
Segno della funzione

Poniamo $f(x) > 0$

$\log\left(\frac{x-1}{x+1}\right) > 0$

$\frac{x-1}{x+1} > 1 \qquad \frac{x-1-x-1}{x+1} > 0 \qquad \frac{-2}{x+1} > 0$

$$\left[\begin{array}{l} -2>0 \\ x+1>0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \emptyset \\ x>-1 \end{array}\right.$$



$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\, (-\infty; -1)$

$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}\, (1; +\infty)$

Limiti agli estremi del campo di definizione

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

$$\lim_{x\to} -f(x) = \log\left(\frac{-2}{0}\right) = \log(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} +f(x) = \log(0) = -\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} f\,(x) = 0$$

Derivata prima: max e min

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x-1}{x+1}} \cdot \frac{1(x+1)-(x-1)1}{(x+1)^2} = \frac{(x+1)}{x-1} \cdot \frac{x+1-x+1}{(x+1)^2} = \frac{2}{(x-1)(x+1)}$$

$$f'(x) \geq 0$$

$$\frac{2}{(x-1)(x+1)} \geq 0 \qquad \begin{cases} 2 \geq 0 & \forall\, x \in R \\ x \leq -1 & x \geq 1 \end{cases}$$

(grafico)

$f(x)$ è crescente $\forall\, x \in R \;\; (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$

Flessi

$$f'(x) = \frac{2}{x^2-1} \qquad f''(x) = 2 - \left(\frac{1}{(x^2-1)^2}\right) \cdot 2x = \frac{-4x}{(x^2-1)^2}$$

$$f''(x) \geq 0 \;\rightarrow\; \frac{-4x}{(x^2-1)^2} \geq 0 \quad \begin{cases} -4x \geq 0 \\ (x^2-1)^2 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \leq 0 \\ \forall\, x \in R \end{cases}$$

La funzione volge la concavità verso il basso per x<0, verso l'alto per x>0.