Studio di funzioni-esercizi svolti

1. Studiare la funzione:

$$y = \log_{1/2}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right)$$

Dominio

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2+1} > 0 \\ x^2+1 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > 2 \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$D: (2;\ +\infty)$$

Intersezione con gli assi

$f(x)$ non interseca l'asse delle ordinate poiché esiste per x >2.

Intersezione con l'asse delle ascisse:

$$\begin{cases} y = 0 \\ y = \log_{1/2}\dfrac{x-2}{x^2+1} \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \log_{1/2}\dfrac{x-2}{x^2+1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-2}{x^2+1} = \left(\dfrac{1}{2}\right)^0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-2}{x^2+1} = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{x-2-x^2-1}{x^2+1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ \dfrac{-x^2+x-3}{x^2+1} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 0 \\ x^2-x+3 = 0 \end{cases}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1-12}}{2} \qquad \Delta < 0 \qquad \emptyset$$

$f(x)$ non interseca l'asse delle ascisse.

Segno

Poniamo $f(x) > 0$:

$$\log_{1/2}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) > 0$$

$$\frac{x-2}{x^2+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^0 \qquad \frac{x-2}{x^2+1} - 1 < 0 \qquad \frac{x-2-x^2-1}{x^2+1} < 0$$

$$\frac{-x^2+x-3}{x^2+1} < 0 \qquad \begin{cases} N > 0 \\ D > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} -x^2+x-3 > 0 \\ x^2+1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \emptyset \\ \forall\, x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

$$f(x) > 0 \quad \forall\, x \in D$$

Limiti agli estremi del dominio

$$\lim_{x\to 2^+} \log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = +\infty \qquad \to x = 2 \; \textit{è un asintoto verticale}$$

$$\lim_{x\to +\infty} \log_{1/2}\left(\frac{x-2}{x^2+1}\right) = +\infty$$

Derivata prima

$$f'(x) = \frac{x^2+1}{x-2}\log_{1/2} e \left(\frac{x^2+1-(x-2)(2x)}{(x^2+1)^2}\right) = ln\frac{1}{2}\left(\frac{x^2+1}{x-2}\right)\left(\frac{x^2+1-2x^2+4x}{(x^2+1)^2}\right) =$$

$$= \log_{1/2} e \left(\frac{x^2+1}{x-2}\right)\left(\frac{-x^2+4x+1}{(x^2+1)^2}\right)$$

Poniamo

$f'(x) \geq 0$

$$\frac{(-x^2 + 4x + 1)}{(x-2)(x^2+1)} \cdot \log_{1/2} e \geq 0$$

$$\begin{cases} -x^2 + 4x + 1 \geq 0 \\ x - 2 > 0 \\ x^2 + 1 > 0 \\ \quad \log_{1/2} e > 0 \end{cases}$$

Le radici della prima sono.
$x = 2 \pm \sqrt{4+1} = 2 \pm \sqrt{5}$

Pertanto :

$$\begin{cases} 2 - \sqrt{5} < x \ < 2 + \sqrt{5} \\ x > 2 \\ \ \forall\, x \in \mathbb{R} \\ \quad \emptyset \end{cases}$$

Quindi la funzione ammette minimo in $x = 2 + \sqrt{5}$

Calcoliamo$f(2+\sqrt{5}) = \log_{1/2}\left(\frac{\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\right)$ quindi min$(2+\sqrt{5};\ \log_{1/2}\left(\frac{\sqrt{5}}{10+2\sqrt{5}}\right))$