

Studiare la funzione e rappresentarla in un piano cartesiano ortogonale:

$$y = \frac{x^3 - 8}{x^2}$$

Classificazione

Si tratta di una funzione razionale fratta con numeratore e denominatore di tipo polinomiale. Non è né pari né dispari quindi non presenta simmetrie.

Dominio

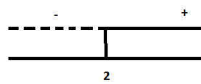
Poiché è una funzione fratta si deve imporre che il denominatore deve essere diverso da 0, quindi il dominio è

$$D_f : \forall x \in] - \infty ; 0 [\cup] 0 ; +\infty [$$

Determinazione degli intervalli di positività / negatività

Bisogna determinare i valori della variabile x che rendono la variabile y positiva; quindi si deve

$$\text{imporre } y = \frac{x^3 - 8}{x^2} > 0 \cdot \quad x^3 - 8 > 0 \Rightarrow x^3 > 8 \Rightarrow x > 2$$



Intersezione con gli assi cartesiani

La curva non ha intersezioni con l'asse delle ordinate perché $x = 0 \notin D_f$

La curva interseca l'asse delle ascisse nel punto A (2 ; 0) – basta porre $y = 0$ nell'equazione –

Andamento della funzione agli estremi del Dominio

Dobbiamo calcolare i limiti:

$$1) \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{x^3 - 8}{x^2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \mp \infty} x = \mp \infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0^{\mp}} \frac{x^3 - 8}{x^2} = -\infty$$

- deduciamo che il segno dell'infinito è - perché, guardando lo schema dei segni, vediamo che in un intorno di 0 la funzione è negativa -

Asintoti

* Il risultato del limite 1) ci dice che la funzione potrebbe avere un asintoto obliquo – in questo caso possiamo anzi dire che sicuramente la curva ha un andamento asintotico poiché il grado della funzione al numeratore è maggiore di 1 rispetto a quello del denominatore –

Per determinare l'equazione dell'asintoto basta dividere il numeratore per il denominatore, otteniamo

$$\begin{array}{r} x^3 - 8 \quad | \quad x^2 \\ -x^3 \quad | \quad x \\ \hline -8 \quad | \end{array}$$

il quoto della divisione ci dà il secondo membro dell'equazione della retta asintoto; quindi l'asintoto ha equazione $y = x - 8$ - bisettrice 1°/3° quadrante -

* Il risultato del limite 2) ci dice che la retta $x = 0$ (asse delle ordinate) è un asintoto verticale per la curva.

Calcolo della derivata prima

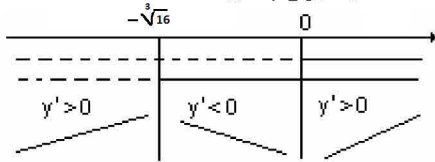
$$f'(x) = \frac{3x^2 \cdot x^2 - 2x(x^3 - 8)}{x^4} = \frac{3x^4 - 2x^4 + 16x}{x^4} = \frac{x^4 + 16x}{x^4} = \frac{x(x^3 + 16)}{x^4}$$

Studio della derivata prima – Determinazione degli intervalli di crescita / decrescenza – Massimi e Minimi relativi e assoluti

Il Dominio della derivata prima $D_f = D_f$ quindi la funzione è continua è derivabile.

Per studiare il segno della derivata prima osserviamo che

$$f'(x) > 0 \Rightarrow x(x^3 + 16) > 0 \quad \begin{matrix} x > 0 \\ x^3 + 16 > 0 \end{matrix} \Rightarrow x > -\sqrt[3]{16}$$



Dallo schema deduciamo che $x = -\sqrt[3]{16}$ è l'ascissa di un massimo; $x = 0$ NON è l'ascissa di un minimo perché $x = 0 \notin D_f$!

Calcolo della derivata seconda

$$y'' = \frac{-48}{x^4}$$

Studio della derivata seconda – Concavità – Flessi

La derivata seconda, essendo x^4 sempre positivo, è sempre negativa; quindi la concavità della curva è sempre rivolta verso il basso.

Grafico

