Esercizi svolti dalla prof.ssa Biondina Galdi – Docente di Matematica

Studiare la funzione e rappresentarla in un piano cartesiano ortogonale:

$$y = (x^2 - 1)\, e^x$$

Classificazione

La funzione è uguale al prodotto tra una funzione polinomiale e una funzione esponenziale

Dominio

Il Dominio è pertanto $D_f : \forall x \; \forall \in \left] -\infty; +\infty \right[$

Determinazione degli intervalli di positività / negatività

Poiché la funzione esponenziale è sempre positiva, la funzione data è positiva per

$(x^2 - 1) > 0 \rightarrow \; x < -1 \cup x > 1$

Intersezione con gli assi cartesiani

Per $x = 0 \rightarrow y = -1$ quindi la funzione incontra l'asse delle ordinate nel punto A(0; -1)

Per $y = 0 \rightarrow x_1 = -1 \cup x_2 = 1$ quindi si hanno i punti di intersezioni B(-1;0) e C(1; 0)

Andamento della funzione agli estremi del Dominio

Dobbiamo calcolare i limiti:

1) $$\lim_{x\to-\infty} \left(x^2 - 1\right) e^x = \left[+\infty \cdot 0\right] = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2 - 1\right)}{\frac{1}{e^x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2x}{-\frac{1}{e^x}} \overset{H}{=} \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\frac{1}{e^x}} = 0$$

2) $$\lim_{x\to+\infty} \left(x^2 - 1\right) e^x = +\infty$$

Asintoti

Dal limite 1) deduciamo che la retta $y = 0$ è un asintoto orizzontale per la curva

Il risultato del limite 2) ci farebbe pensare all'esistenza di un asintoto obliquo.

Per determinare i coefficienti angolari degli eventuali asintoti obliqui calcoliamo allora i limiti

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{\left(x^2 - 1\right) e^x}{x} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x^2 - 1\right) e^x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \left(x - \frac{1}{x}\right) e^x = +\infty$$

Poiché questi limiti non danno come risultato un numero finito diverso da 0, deduciamo che la curva non ha asintoti obliqui.

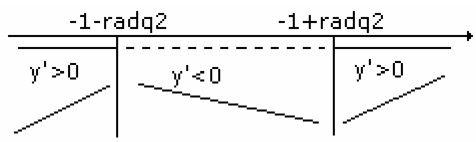
Calcolo della derivata prima

$y' = 2x\, e^x + (x^2 - 1)\, e^x = e^x\, (x^2 + 2x - 1)$

Studio della derivata prima – Determinazione degli intervalli di crescenza / decrescenza – Massimi e Minimi relativi e assoluti

Poiché la funzione esponenziale è sempre positiva, la derivata prima è positiva quando

$(x^2 + 2x - 1) > 0 \rightarrow x < -1 -$ radq2 $\cup\; x > -1 +$ radq2



Dallo schema si evince che x = -1-radq2 è un punto di massimo e x = -1+radq2 è un punto di minimo.

Il dominio della derivata prima $D_{f'} = D_f$ quindi la funzione è continua e derivabile.

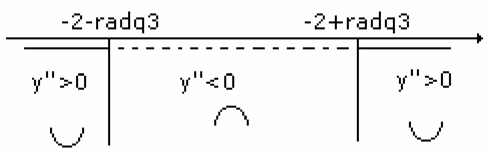
Calcolo della derivata seconda

$y'' = e^x(x^2 + 2x - 1) + e^x(2x + 2) = e^x\, (x^2 + 4x + 1)$

Studio della derivata seconda – Concavità – Flessi

Poiché la funzione esponenziale è sempre positiva, la derivata seconda è positiva se

$(x^2 + 4x +1)>0 \rightarrow x<-2 - \text{radq}3 \;\; \text{U} \;\; x>-2+\text{radq}3$



Dallo schema si deduce che x = -2-radq3 e x = -2+radq3 sono le ascisse di punti di flesso

Grafico