

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^x$$

**Soluzione**

**Insieme di definizione**

Questa funzione è definita in  $X = (-\infty, +\infty)$ .

**Intersezioni con gli assi**

$$f(x) = 0 \iff x = 0 \implies (0, 0) \in \gamma$$

essendo  $\gamma$  il grafico della funzione.

**Studio del segno**

$$f(x) > 0 \iff x > 0$$

Il grafico giace nel semipiano  $y < 0$  per  $x < 0$  e nel semipiano  $y > 0$  per  $x > 0$ .

**Comportamento agli estremi**

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{e^{-x}} = 0^-\end{aligned}$$

Quindi l'asse  $x$  è asintoto orizzontale a sinistra.

Ovviamente non esistono asintoti obliqui a destra.

**Calcolo delle derivate**

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x(x+1) \\ f''(x) &= e^x(x+2)\end{aligned}$$

**Studio della monotonìa e ricerca degli estremi relativi ed assoluti**

Zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \iff x = -1$$

Quindi abbiamo il punto estremo  $x = -1$ .

Segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff x > -1,$$

donde la funzione è strettamente crescente in  $(-1, +\infty)$  ed è strettamente decrescente in  $(-\infty, -1)$ . Da ciò segue che  $x = -1$  è punto minimo relativo. Ed è anche punto di minimo assoluto:

$$m\left(-1, -\frac{1}{e}\right)$$

### Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = -2$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x > -2,$$

per cui il grafico volge la concavità verso il basso in  $(-\infty, -2)$  per poi volgere la concavità verso l'alto in  $(-2, +\infty)$ . Segue che  $x = -2$  è punto di flesso:

$$F\left(-2, -\frac{2}{e^2}\right)$$

### Tracciamento del grafico.

Il grafico completo è riportato in figura (2).

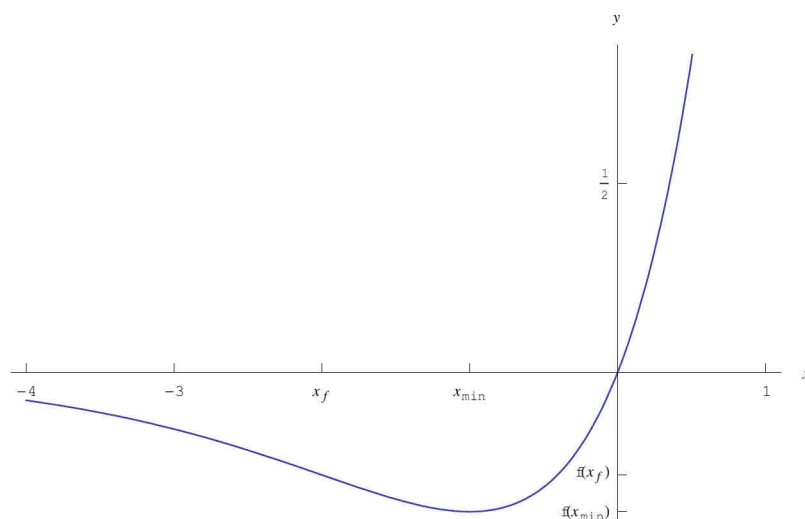


Figure 2: Grafico della funzione  $f(x) = xe^x$