Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{1 - 2^{1/x}}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
Questa funzione è definita in $X = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \Longrightarrow \quad \nexists P \in \gamma \cap x$$

Inoltre:

$$0 = x \notin X \Longrightarrow \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$\forall x \in X, \ f(x) < 0$$

Il grafico giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima in $x = 0$. Infatti:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} f(x) &= \lim_{x \to 0^+} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{0^+}{-\infty} = 0^- \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) &= \lim_{x \to 0^-} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{0^-}{1} = 0^- \end{aligned}$$

Le (3) implicano:

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0,$$

per cui $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
Studiamo ora il comportamento all'infinito:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} f(x) &= \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{+\infty}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} f(x) &= \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{1 - 2^{1/x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \end{aligned}$$

Ricerchiamo eventuali asintoti obliqui:

$$\begin{aligned} \lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} = \frac{1}{0^-} = -\infty \\ \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{1 - 2^{1/x}} = \frac{1}{0^+} = +\infty \end{aligned}$$

Da ciò segue che il grafico è privo di asintoti obliqui.

Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x)=\frac{x\left(1-2^{1/x}\right)-2^{1/x}\ln 2}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}$$
$$f''(x)=\frac{2^{1/x}\left(1+2^{1/x}\right)\ln^2 2}{x^3\left(1-2^{1/x}\right)^3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Lo studio del segno e la ricerca degli zeri della derivata prima è troppo complicato, per cui ci limitiamo a studiarne il comportamento in un intorno di $x=0$. In ogni caso, ci aspettiamo una crescenza in $(-\infty,0)$ e una decrescenza in $(0,+\infty)$.

$$\begin{aligned}
f'_-(0)&=\lim_{x\to0^-}\frac{x\left(1-2^{1/x}\right)-2^{1/x}\ln 2}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}=\\
&=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{1-2^{1/x}}-\ln 2\lim_{x\to0^-}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}\\
&=1-\ln 2\lim_{x\to0^-}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to0^-}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\left(1-2^{1/x}\right)^2}\cdot\lim_{x\to0^-}\frac{2^{1/x}}{x}$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{1}{\left(1-2^{1/x}\right)^2}=1$$
$$\lim_{x\to0^-}\frac{2^{1/x}}{x}\underset{t=\frac{1}{x}}{=}\lim_{t\to-\infty}\frac{t}{2^{-t}}=0$$
$$\Longrightarrow\lim_{x\to0^-}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}=0,$$

perciò:

$$f'_-(0)=1$$

La derivata sinistra:

$$\begin{aligned}
f'_+(0)&=\lim_{x\to0^+}\frac{x\left(1-2^{1/x}\right)-2^{1/x}\ln 2}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}=\\
&=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{1-2^{1/x}}-\ln 2\lim_{x\to0^+}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}\\
&=0-\ln 2\lim_{x\to0^+}\frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2}
\end{aligned}$$

Calcoliamo a parte:

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{2^{1/x}}{x\left(1-2^{1/x}\right)^2} = \frac{\infty}{0\cdot\infty} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x2^{1/x}\left(2^{-1/x}-1\right)^2} = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

poichè:

$$\lim_{x\to 0^+} x2^{1/x} \underset{t=\frac{1}{x}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{2^t}{t} = +\infty$$

Quindi:

$$f'_+(0) = 0$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$\nexists x \in X \mid f''(x) = 0 \Longrightarrow \nexists \text{ punti di flesso}$$

Segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x\left(1-2^{1/x}\right) > 0 \quad \text{mai!}$$

per cui il grafico volge la concavità verso il basso.
Tracciamento del grafico.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

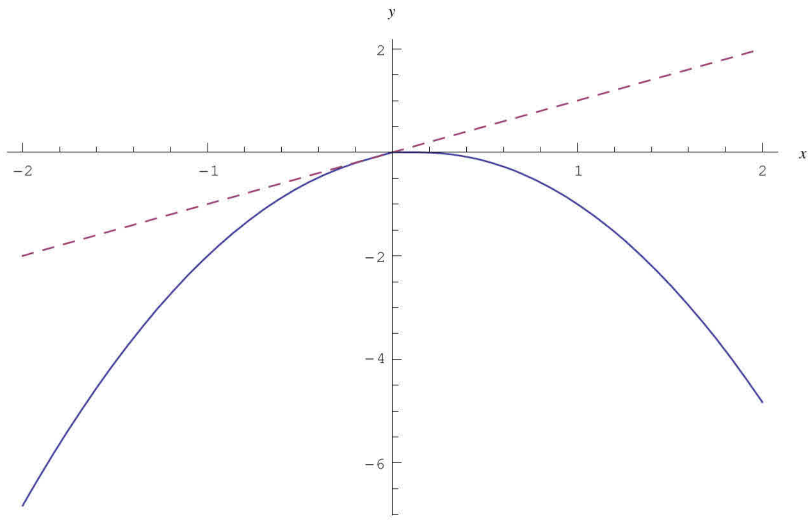

Figure 1: Grafico della funzione $f(x) = \frac{x}{1-2^{1/x}}$