

Esercizio 682
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln \left(e + \frac{1}{x} \right) \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Deve essere:

$$e + \frac{1}{x} > 0 \iff \frac{ex + 1}{x} > 0 \iff x \in \left(-\infty, -\frac{1}{e} \right) \cup (0, +\infty),$$

quindi:

$$X = \left(-\infty, -\frac{1}{e} \right) \cup (0, +\infty) \quad (2)$$

Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \frac{ex + 1}{x} = 1 \iff ex + 1 = x \iff x = \frac{1}{1 - e} \implies A \left(\frac{1}{1 - e}, 0 \right) \in \gamma \cap x$$
$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y,$$

essendo γ il grafico della funzione.

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \frac{ex + 1}{x} > 1 \iff \frac{x(e - 1) + 1}{x} > 0 \iff x \in \left(-\infty, \frac{1}{1 - e} \right) \cup (0, +\infty),$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$ per $x \in \left(-\infty, \frac{1}{1 - e} \right) \cup (0, +\infty)$ e nel semipiano $y < 0$ per $x \in \left(\frac{1}{1 - e}, -\frac{1}{e} \right)$.

Comportamento agli estremi

La funzione diverge negativamente per $x \rightarrow -\frac{1}{e}$:

$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{e}^-} f(x) = \ln 0^+ = -\infty,$$

e ciò implica che la retta $x = -\frac{1}{e}$ è asintoto verticale.

La funzione diverge positivamente per $x \rightarrow 0$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \ln(+\infty) = +\infty,$$

per cui l'asse y è asintoto verticale.

La funzione è convergente per $x \rightarrow \pm\infty$:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \ln(e + 0^+) = \ln e^+ = 1^+ \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \ln(e + 0^-) = \ln e^- = 1^-, \end{aligned}$$

cosicchè la retta $y - 1 = 0$ è asintoto orizzontale sia a destra che a sinistra. Esaminiamo se esistono intersezioni al finito con l'asintoto orizzontale:

$$f(x) = 1 \iff e + \frac{1}{x} = e \iff \frac{1}{x} = 0 \quad (3)$$

La (3) è priva di soluzioni al finito, donde non esistono intersezioni con l'asintoto orizzontale

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\frac{1}{x(ex+1)} \\ f''(x) &= \frac{2ex+1}{x^2(ex+1)^2}\end{aligned} \quad (4)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Risulta:

$$\forall x \in X, f'(x) < 0$$

Quindi f è strettamente decrescente in X

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff -\frac{1}{2e} = x \notin X \implies \nexists \text{ punti di flesso}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff \begin{cases} 2ex + 1 > 0 \\ x(ex + 1) \neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 2ex + 1 > 0 \\ x \in X \end{cases} \iff x \in (0, +\infty)$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(0, +\infty)$ ed è convesso verso il basso in $(-\infty, -\frac{1}{e})$. Il grafico completo è riportato in figura (1).

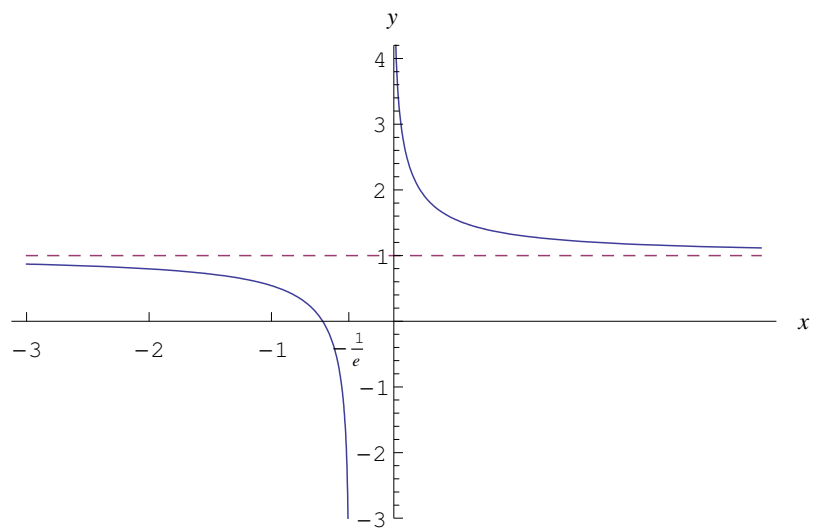


Figure 1: Grafico della funzione assegnata.