

Esercizio 690
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studio della funzione:

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + |x|} \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

Per la presenza del valore assoluto dobbiamo distinguere i due casi: $x \geq 0$ e $x < 0$, giacchè:

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{se } x \geq 0 \\ -x, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (2)$$

Quindi:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+x}, & \text{se } x > 0 \\ \frac{1}{x^2-x}, & \text{se } x < 0 \end{cases} \quad (3)$$

N.B. Nella (3) poniamo $x > 0$ in quanto la funzione non è definita per $x = 0$.
Definiamo allora due funzioni:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= \frac{1}{x^2+x}, & \text{per } x \in X_1 &= (0, +\infty) \\ f_2(x) &= \frac{1}{x^2-x}, & \text{per } x \in X_2 &= (-\infty, 0) \end{aligned} \quad (4)$$

Siccome la funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, il grafico è simmetrico rispetto all'asse y , quindi ci basta studiare l'andamento del grafico γ_1 di f_1 , dopodichè procedendo per simmetria costruiamo il grafico γ_2 di f_2 . Il grafico di f è $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$.

Studio della f_1

Risulta:

$$\forall x \in X_1, f_1(x) > 0$$

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{0^+} = +\infty,$$

quindi l'asse y è asintoto verticale.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2+x} = \frac{1}{+\infty} = 0^+,$$

quindi l'asse x è asintoto verticale.

La derivata prima:

$$f_1'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x)^2}$$

Risulta:

$$\forall x \in X_1, f'_1(x) < 0,$$

quindi la funzione f_1 è strettamente decrescente in X_1 . Per la concavità non c'è bisogno di calcolare la derivata seconda: è facile rendersi conto che γ_1 è concavo verso l'alto.

Il grafico di f_1 è in figura (1)

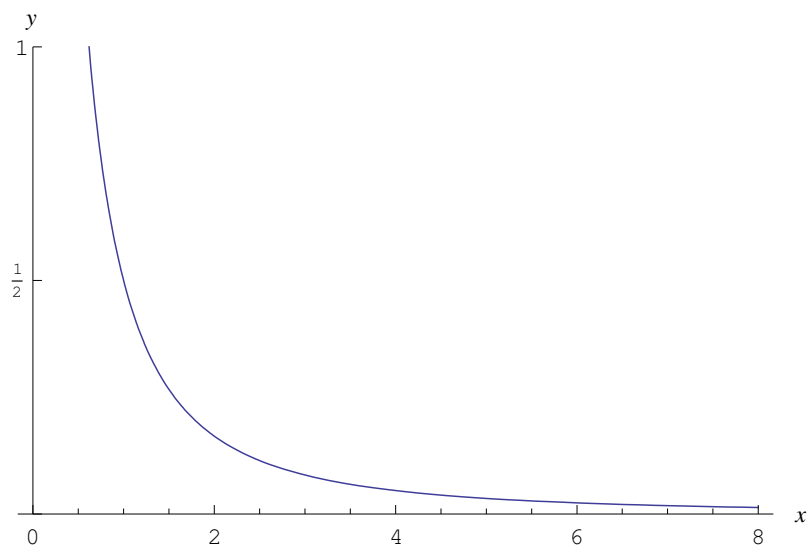


Figure 1: Grafico della funzione $f_1(x)$.

Il grafico γ_2 di f_2 è il simmetrico di γ_1 rispetto all'asse y , quindi il grafico di f è riportato in in figura (2).

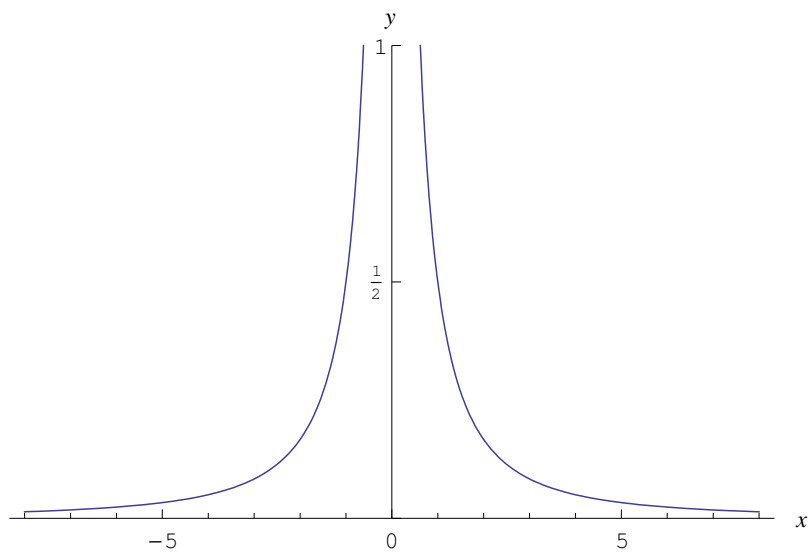


Figure 2: Grafico della funzione assegnata.