

Esercizio 681
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln(1 + e^{-x}) \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in X tale che $1 + e^{-x} > 0$, che è verificata $\forall x \in \mathbb{R}$, quindi $X = \mathbb{R}$.

Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned} f(x) = 0 &\iff 1 + e^{-x} = 1 \iff e^{-x} = 0 \text{ mai!} \implies \nexists P \in \gamma \cap x \\ f(0) = \ln 2 &\implies A(0, \ln 2) \in \gamma \cap y \end{aligned}$$

Studio del segno

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) > 0,$$

per cui il grafico giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinitesima per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+, \quad (2)$$

cosicché l'asse x è asintoto orizzontale.

La funzione è infinita per $x \rightarrow -\infty$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

Calcoliamo:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{1 + e^{-x}} \\ &= - \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{e^x + 1} = -1 = m \\ n &= \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx] = \lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + e^{-x}) + x] = \infty - \infty \end{aligned}$$

Per rimuovere la forma indeterminata poniamo $1 + e^{-x} = t$, quindi per $x \rightarrow -\infty \implies t \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [\ln(1 + e^{-x}) + x] = \lim_{t \rightarrow +\infty} [\ln t - \ln(t - 1)] = \lim_{t \rightarrow +\infty} \ln \frac{t}{t - 1} = \ln 1 = 0$$

Pertanto il grafico ammette un asintoto obliquo a sinistra; la sua equazione è:

$$y = -x \tag{3}$$

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = -\frac{1}{1+e^x} \tag{4}$$
$$f''(x) = \frac{e^x}{(1+e^x)^2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri di $f'(x)$:

$$\nexists x \in X \mid f'(x) = 0 \tag{5}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$\forall x \in X, f'(x) < 0$$

Quindi f è strettamente decrescente in X

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$\nexists x \in X \mid f''(x) = 0$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$\forall x \in X, f''(x) > 0$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto.

Il grafico completo è riportato in figura (1).

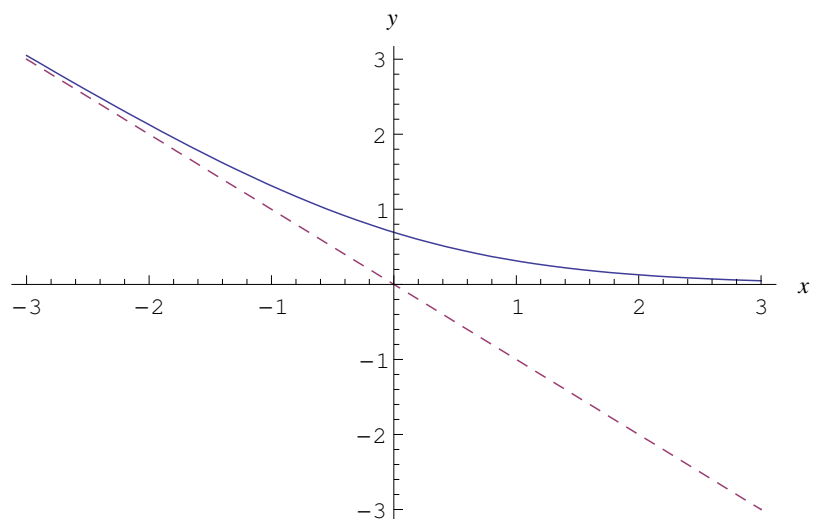


Figure 1: Grafico della funzione assegnata.