Esercizio 680
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right) + \frac{1}{x^2 - 1} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in X tale che $x^2 - 1 > 0$, quindi $X = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.
Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$, per cui il grafico è simmetrico rispetto all'asse y.
Intersezioni con gli assi
Data l'espressione analitica della funzione, bisognerebbe ricorrere al calcolo numerico, per cui tralasciamo le intersezioni con gli assi, osservando però che non ci sono intersezioni con l'asse y, giacchè $0 = x \notin X$.
Studio del segno
Tralasciamo per le stesse ragioni di sopra.
Comportamento agli estremi

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \ln\left(0^+\right) + \frac{1}{0^+} = (-\infty) + (+\infty) = \infty - \infty \tag{2}$$

Per rimuovere la forma indeterminata (2) procediamo nel seguente modo_

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{(x^2 - 1)\ln(x^2 - 1) + 1}{x^2 - 1} \tag{3}$$

Poniamo:

$$l_1 = \lim_{x \to 1^+} \left(x^2 - 1\right) \ln\left(x^2 - 1\right) = 0 \cdot \infty$$

Poniamo:

$$\ln\left(x^2 - 1\right) = t \Longrightarrow x^2 - 1 = e^t$$

Abbiamo:

$$x \to 1^+ \Longrightarrow x^2 - 1 = e^t \to 0^+ \Longrightarrow t \to -\infty,$$

cosicchè:

$$l_1 = \lim_{t \to -\infty} te^t = \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{-t}} = 0^+,$$

in quanto e^t è per $t \to -\infty$ un infinito di ordine infinitamente grande. Ora siamo in grado di calcolare il limite (3):

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \frac{l_1 + 1}{\lim_{x \to 1^+} (x^2 - 1)} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

Quindi la retta $x = 1$ è asintoto verticale. Siccome la funzione è pari, si ha:

$$\lim_{x \to -1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$$

Quindi la retta $x = -1$ è asintoto verticale.
La funzione è infinita per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \tag{4}$$

giacchè $\ln x$ è, per $x \to +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo.
Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} + \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{x(x^2 - 1)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} + 0^+$$

Ma:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2 - 1)}{x} = \frac{\infty}{\infty} \overset{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{2x}{x^2 - 1} = 0$$

Quindi:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \underset{f \text{ è pari}}{\Longrightarrow} \lim_{x \to -\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$$

Pertanto il grafico è privo di asintoti obliqui.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{2x(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2} \tag{5}$$
$$f''(x) = -2\frac{x^4 - 3x^2 - 2}{(x^2 - 1)^3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri di $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow \frac{2x(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2} = 0 \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{2}, 0 \tag{6}$$

$0 = x \notin X$, quindi gli unici punti estremali sono:

$$x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$$

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow \frac{x(x^2 - 2)}{(x^2 - 1)^2} > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(-\sqrt{2}, -1\right) \cup \left(\sqrt{2}, +\infty\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(-\sqrt{2},-1\right)\cup\left(\sqrt{2},+\infty\right)$, e strettamente decrescente in $\left(-\infty,-\sqrt{2}\right)\cup\left(1,\sqrt{2}\right)$. Ciò implica che $x_{1,2}$ sono entrambi punti di minimo relativo

$$m_1\left(-\sqrt{2},1\right),\ m_2\left(\sqrt{2},1\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x)=0\Longleftrightarrow\frac{x^4-3x^2-2}{\left(x^2-1\right)^3}=0\Longleftrightarrow x^4-3x^2-2=0\Longleftrightarrow x'_{1,2}=\mp\sqrt{\frac{1}{2}\left(3+\sqrt{17}\right)}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x)>0\Longleftrightarrow\frac{x^4-3x^2-2}{\left(x^2-1\right)^3}<0\Longleftrightarrow x\in(x'_1,-1)\cup(1,x'_2)$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(x'_1,-1)\cup(1,x'_2)$, ed è concavo verso il basso in $(-\infty,x'_1)\cup(x'_2,+\infty)$. Da ciò segue che $x'_{1,2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua.
Il grafico completo è riportato in figura (1).

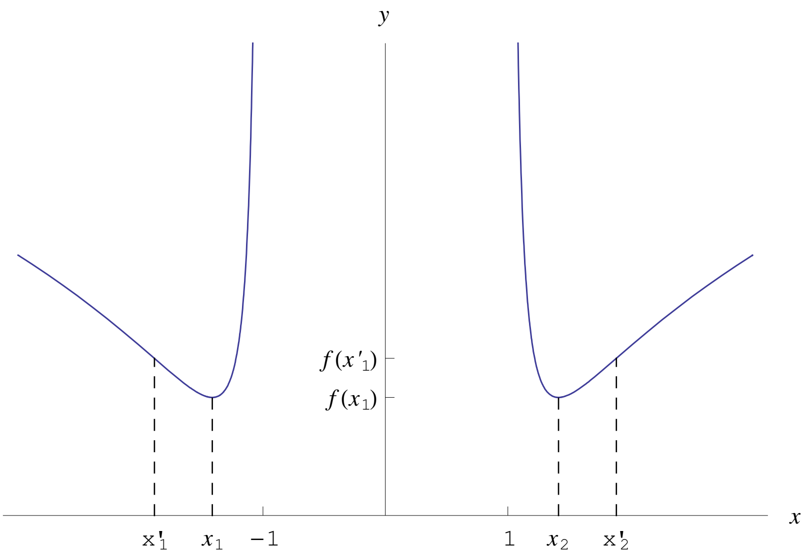

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.