

Esercizio 678
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x}{\ln x} \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in X tale che $\ln x \neq 0$, cioè $X = (0, 1) \cup (1, +\infty)$.

Intersezioni con gli assi

$$\begin{aligned} \nexists x \in X \mid f(x) = 0 &\implies \nexists P \in \gamma \cap x \\ 0 = x \notin X &\implies \nexists P \in \gamma \cap y \end{aligned}$$

essendo γ il grafico della funzione.

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \frac{x}{\ln x} > 0 \iff x \in (1, +\infty)$$

Segue che per $x > 1$ il diagramma giace nel semipiano $y > 0$, mentre per $x \in (0, 1)$ giace nel semipiano $y < 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinita per $x \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty, \quad (2)$$

giacchè $\ln x$ è, per $x \rightarrow +\infty$ un infinito di ordine infinitamente piccolo.

Inoltre:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0 \implies \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Per $x \rightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\ln x} = \frac{0}{-\infty} = 0^- \quad (3)$$

Quindi $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} \\ f''(x) &= \frac{2 - \ln x}{x \ln^3 x} \end{aligned} \quad (4)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \iff x = e,$$

quindi $x_0 = e$ è un punto estremo.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (e, +\infty)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(e, +\infty)$, e strettamente decrescente in $(0, e)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo.

$$m(e, e)$$

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = e^2$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x \in (1, e^2),$$

per cui il grafico è concavo verso il basso in $(e^2, +\infty)$, ed è concavo verso l'alto in $(0, e^2)$. Da ciò segue che e^2 è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(e^2, \frac{e^2}{2}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

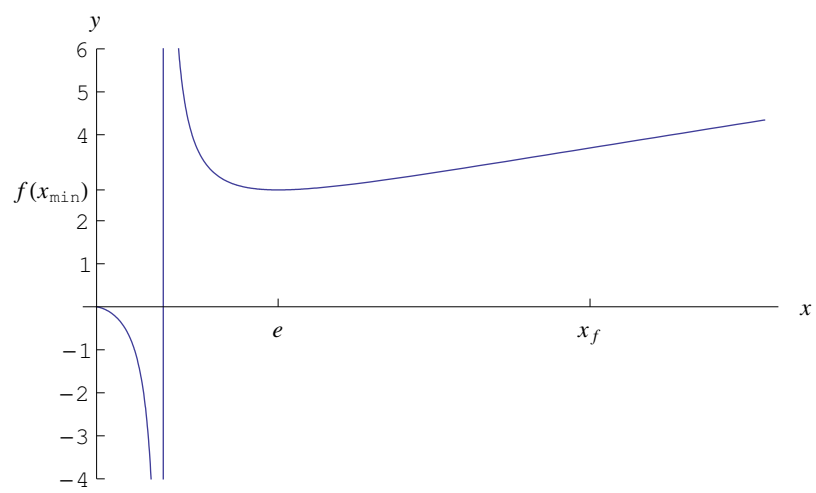


Figure 1: Grafico della funzione assegnata.