Esercizio 677
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln \frac{x}{2} = 0 \Longleftrightarrow x = 2 \Longrightarrow A(2, 0) \in \gamma \cap x \tag{2}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow \ln \frac{x}{2} > 0 \Longleftrightarrow x \in (2, +\infty)$$

Segue che per $x > 2$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$, mentre per $x \in (0, 2)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinita per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = (+\infty) \cdot (+\infty) = +\infty \tag{3}$$

Inoltre:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty \Longrightarrow \nexists \text{ asintoti obliqui}$$

Per $x \longrightarrow 0^+$:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^2}{2} \ln \frac{x}{2} = 0 \cdot \infty \tag{4}$$

Per rimuovere tale forma indeterminata poniamo:

$$\ln \frac{x}{2} = t \Longrightarrow x = 2e^t,$$

cosicchè $x \longrightarrow 0^+$ implica $t \longrightarrow -\infty$, e il limite diventa:

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = 2 \lim_{t \to -\infty} te^{2t} = 2 \lim_{t \to -\infty} \frac{t}{e^{2t}} = 0,$$

giacché e^t è - per $t \longrightarrow -\infty$ - un infinito di ordine infinitamente grande.
Quindi $x = 0$ è una discontinuità eliminabile.
Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{x}{2}\left(1 + 2\ln\frac{x}{2}\right) \tag{5}$$
$$f''(x) = \frac{3}{2} + \ln\frac{x}{2}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \Longleftrightarrow 1 + 2\ln\frac{x}{2} \Longleftrightarrow x = \frac{2}{\sqrt{e}},$$

quindi $x_0 = \frac{2}{\sqrt{e}}$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{2}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $\left(\frac{2}{\sqrt{e}}, +\infty\right)$, e strettamente decrescente in $\left(0, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di minimo assoluto per f:

$$m\left(\frac{2}{\sqrt{e}}, \frac{2}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln\frac{x}{2} = -\frac{3}{2} \Longleftrightarrow \frac{x}{2} = e^{-3/2} \Longleftrightarrow x = \frac{2}{e^{3/2}}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(\frac{2}{e^{3/2}}, +\infty\right),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(\frac{2}{e^{3/2}}, +\infty\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(0, \frac{2}{e^{3/2}}\right)$.
Da ciò segue che $\frac{2}{e^{3/2}}$ è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(\frac{2}{e^{3/2}}, -\frac{3}{e^3}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

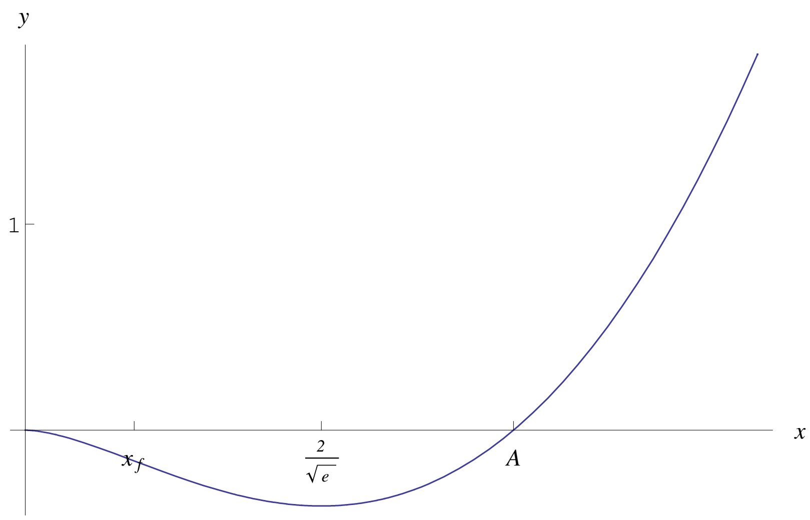

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.