Esercizio 676
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}} \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (0, +\infty)$
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \iff \ln x = 0 \iff x = 1 \Longrightarrow A(1, 0) \in \gamma \cap x \tag{2}$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff x \in (1, +\infty)$$

Segue che per $x > 1$ il diagramma giace nel sempiano $y > 0$, mentre per $x \in (0, 1)$ giace nel semipiano $y < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{\infty}{\infty} \stackrel{H}{=} \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2\sqrt{x}}} = 2 \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0^+, \tag{3}$$

cioè l'asse x è asintoto orizzontale a destra.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{\sqrt{x}} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty \tag{4}$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{2 - \ln x}{2x\sqrt{x}} \tag{5}$$
$$f''(x) = \frac{3\ln x - 8}{4x^2\sqrt{x}}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti
Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \iff \ln x = 2 \iff x = e^2,$$

quindi $x_0 = e^2$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(0, e^2\right)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(0, e^2)$, e strettamente decrescente in $(e^2, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \overset{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f:

$$M\left(e^2, \frac{2}{e}\right)$$

Concavità e punti di flesso.
Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \Longleftrightarrow \ln x = \frac{8}{3} \Longleftrightarrow x = e^{8/3}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in \left(e^{8/3}, +\infty\right),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $\left(e^{8/3}, +\infty\right)$, ed è concavo verso il basso in $\left(0, e^{8/3}\right)$. Da ciò segue che $e^{8/3}$ è punto di flesso a tangente obliqua:

$$F\left(e^{8/3}, \frac{8}{3e^{4/3}}\right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

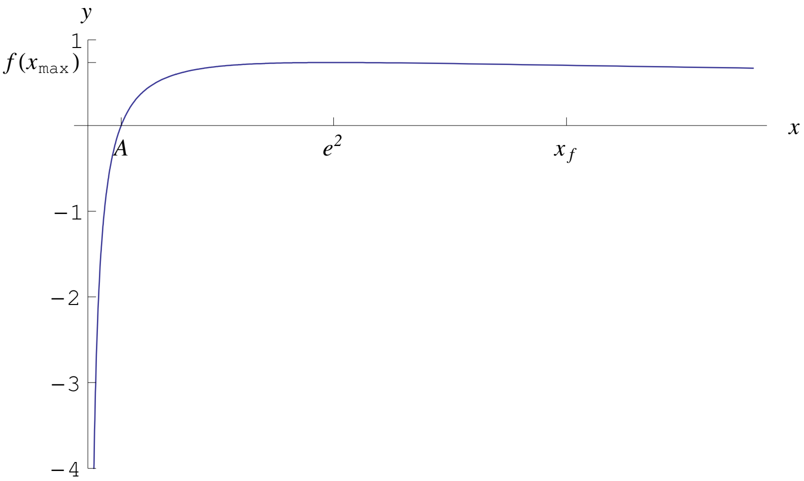

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.