Esercizio 675
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = 2|x| - x^2 \tag{1}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
A causa della presenza del valore assoluto, conviene distinguere i due casi: $x \geq 0$, $x < 0$.

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x), & x < 0 \\ f_2(x), & x \geq 0, \end{cases} \tag{2}$$

essendo:

$$\begin{aligned} f_1(x) &= -2x - x^2, \quad \text{in } (-\infty, 0) \\ f_2(x) &= 2x - x^2, \quad \text{in } (0, +\infty) \end{aligned} \tag{3}$$

Simmetrie
La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0, \pm 2 \Longrightarrow A(-2,0), B(2,0) \in \gamma \cap x, O(0,0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Dalle (3) segue che il grafico di f è composto da due parabole raccordate in $(0,0)$. Precisamente:

$$\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2,$$

essendo:

$$\begin{aligned} &\gamma_1)\ y = -2x - x^2 \quad \text{per } x \in (-\infty, 0) \\ &\gamma_2)\ y = 2x - x^2 \quad \text{per } x \in (0, +\infty) \end{aligned}$$

Il punto $(0,0)$ è un punto angoloso. La derivata prima è:

$$f(x) = \begin{cases} f_1'(x) = -2(x+1), & x < 0 \\ f_2'(x) = 2(1-x), & x \geq 0, \end{cases} \tag{4}$$

Quindi:

$$\begin{aligned} f'_-(0) &= f'_1(0) = -2 \\ f'_+(0) &= f'_2(0) = 2 \end{aligned}$$

Possiamo perciò scrivere le equazioni delle semirette tangenti τ_- e τ_+ rispettivamente a sinistra e a destra nel punto $(0,0)$:

$$\begin{aligned}\tau_-)\ y &= f(0) + f'_-(0)\,x \Longleftrightarrow y = -2x \\ \tau_+)\ y &= f(0) + f'_+(0)\,x \Longleftrightarrow y = 2x\end{aligned}$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

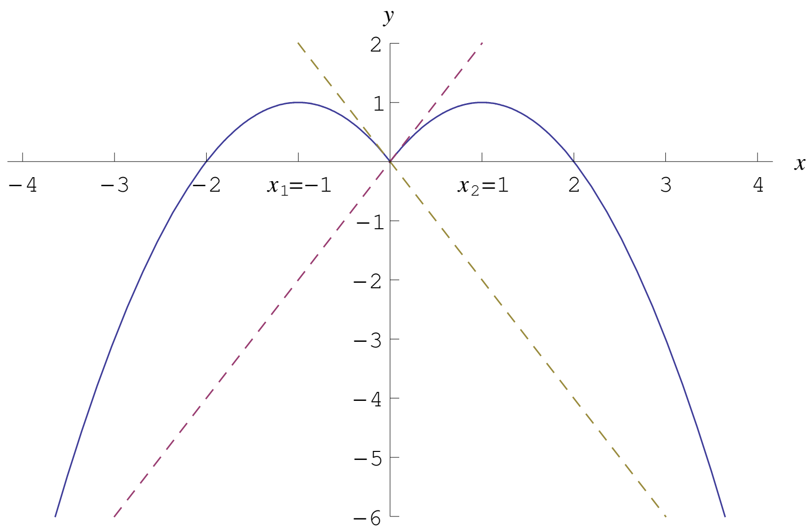

Figure 1: Grafico della funzione assegnata.