

Esercizio 671
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = (2 + x^2) e^{-x^2} \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$

Simmetrie

La funzione è pari: $f(-x) \equiv f(x)$.

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x \quad (2)$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = 2 \implies (0, 2) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

Dalla (2) segue che il diagramma giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinitesima per $|x| \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (2 + x^2) e^{-x^2} = 0 \cdot \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 + x^2}{e^{x^2}} = 0^+, \quad (3)$$

poichè e^{x^2} è - per $x \rightarrow +\infty$ - un infinito di ordine infinitamente grande.

Dalla parità della funzione segue:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0^+ \implies \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0^+$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2x(x^2 + 1)e^{-x^2} \\ f''(x) &= 2(2x^4 - x^2 - 1)e^{-x^2} \end{aligned} \quad (4)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \iff x = 0,$$

quindi $x_0 = 0$ è un punto estremale.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 0)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 0)$, e strettamente decrescente in $(0, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{\text{def}}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f .

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff 2x^4 - x^2 - 1 = 0 \iff x^2 = \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{cases}$$

Prendendo le soluzioni reali:

$$x_{1,2} = \pm 1$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x^2 > 1 \iff x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, ed è concavo verso il basso in (x_1, x_2) . Da ciò segue che $x_{1,2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua:

$$F_1 \left(-1, \frac{3}{e} \right), F_2 \left(1, \frac{3}{e} \right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

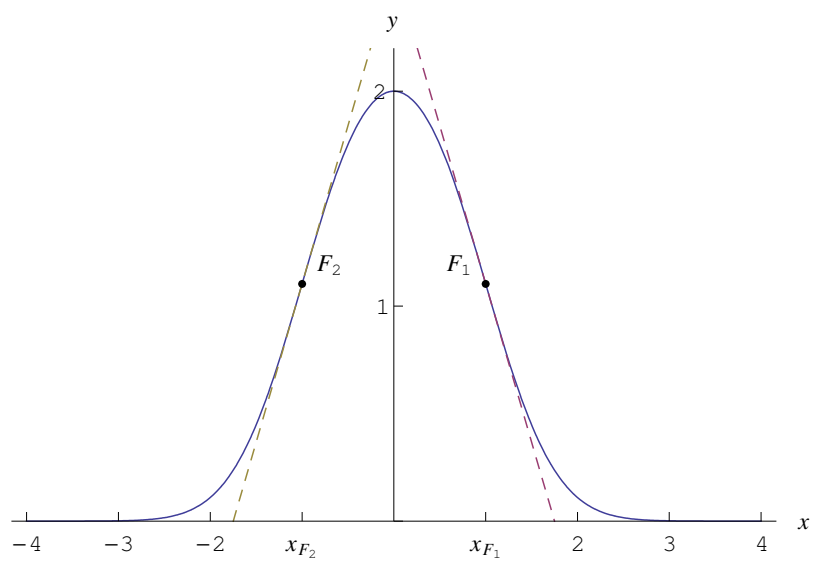


Figure 1: Grafico della funzione assegnata.