

Esercizio 670
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione

$$f(x) = e^{8x-x^2-14} \quad (1)$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$

Intersezioni con gli assi

$$\forall x \in X, f(x) > 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x \quad (2)$$

essendo γ il grafico della funzione. Inoltre:

$$f(0) = \frac{1}{e^{14}} \implies A\left(0, \frac{1}{e^{14}}\right) \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

Dalla (2) segue che il diagramma giace nel semipiano $y > 0$.

Comportamento agli estremi

La funzione è infinitesima per $|x| \rightarrow +\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0^+, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = e^{-\infty} = 0^- \quad (3)$$

per cui l'asse x è asintoto orizzontale sia a sinistra che a destra.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(x-4)f(x) \\ f''(x) &= 2f(x)(2x^2 - 16x + 31) \end{aligned} \quad (4)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \iff x = 4,$$

quindi $x_0 = 4$ è un punto estremo.

Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 4)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 4)$, e strettamente decrescente in $(4, +\infty)$. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\max}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di massimo assoluto per f .

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff 2x^2 - 16x + 31 = 0 \iff x = x_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{2}}{2}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff 2x^2 - 16x + 31 > 0 \iff x \in (-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty),$$

per cui il grafico è concavo verso l'alto in $(-\infty, x_1) \cup (x_2, +\infty)$, ed è concavo verso il basso in (x_1, x_2) . Da ciò segue che $x_{1,2}$ sono punti di flesso a tangente obliqua:

$$F_1 \left(\frac{8 - \sqrt{2}}{2}, e\sqrt{e} \right), F_2 \left(\frac{8 + \sqrt{2}}{2}, e\sqrt{e} \right)$$

Il grafico completo è riportato in figura (1).

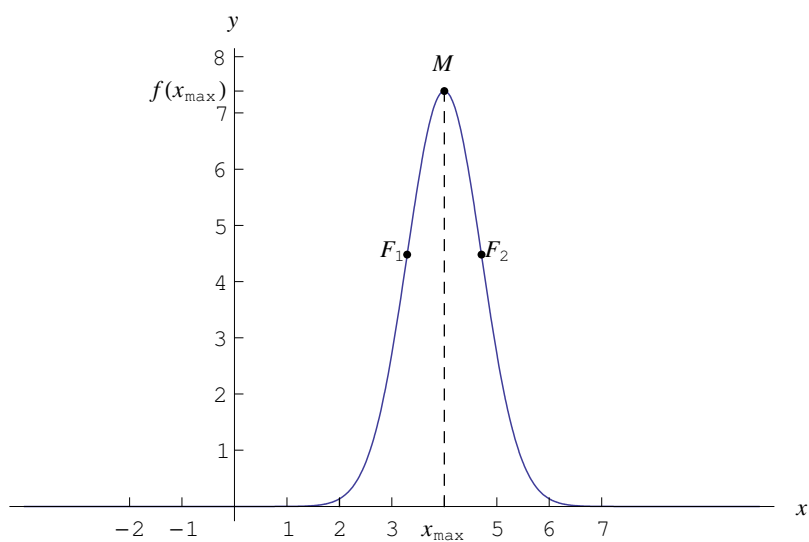


Figure 1: Grafico della funzione assegnata.