Esercizio 668
(File scaricato da http://www.extrabyte.info)

Studiare la funzione

$$f(x) = xe^{-x}$$

***

Soluzione
Insieme di definizione
La funzione è definita in $X = (-\infty, +\infty)$.
Intersezioni con gli assi

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \Longrightarrow O(0,0) \in \gamma$$

essendo γ il grafico della funzione.
Studio del segno

$$f(x) > 0 \Longleftrightarrow x \in (0, +\infty),$$

per cui il diagramma giace nel sempiano $y > 0$ per $x > 0$, e nel semipiano $y < 0$ per $x < 0$.
Comportamento agli estremi
La funzione è infinitesima per $x \to +\infty$:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0 \cdot \infty = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0^+,$$

giacchè e^x è, per $x \to +\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Quindi l'asse x è asintoto orizzontale a destra.
Per $x \to -\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty} xe^{-x} = (-\infty) \cdot (+\infty) = -\infty$$

Poniamo per definizione:

$$g(x) = |x|^\alpha$$

Risulta:

$$\forall \alpha > 0, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = -\infty,$$

per cui la funzione è, per $x \to -\infty$, un infinito di ordine infinitamente grande. Si conclude che il diagramma cartesiano è privo di asintoto obliquo a sinistra.
Calcolo delle derivate
Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = e^{-x}(1 - x)$$
$$f''(x) = e^{-x}(x - 2)$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Zeri della $f'(x)$:

$$f'(x) = 0 \iff x = 1,$$

quindi $x_0 = 1$ è un punto estremale.
Studiamo il segno della derivata prima:

$$f'(x) > 0 \iff x \in (-\infty, 1)$$

Quindi f è strettamente crescente in $(-\infty, 1)$, e strettamente decrescente altrove. Ciò implica che $x_0 \stackrel{def}{=} x_{\min}$ è punto di massimo relativo. È facile convincersi che è anche punto di minimo assoluto per f.

Concavità e punti di flesso.

Zeri della derivata seconda:

$$f''(x) = 0 \iff x = 2$$

Studio del segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x \in (2, +\infty),$$

per cui γ è concavo verso l'alto in $(2, +\infty)$ e concavo verso il basso in $(-\infty, 2)$.
In figura (1) riportiamo il grafico per $x \in [-1, 4]$.

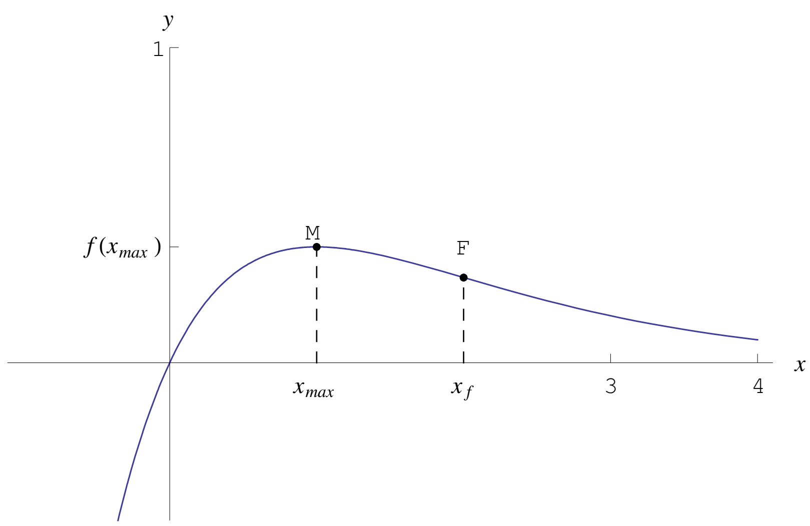

Figure 1: Grafico della funzione assegnata per $x \in [-1, 4]$.

In figura (2) riportiamo il grafico completo.

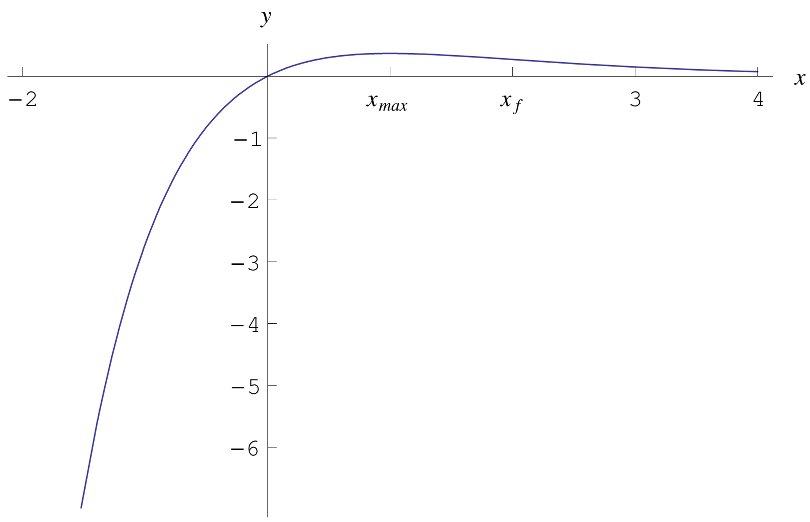

Figure 2: Grafico della funzione assegnata.