

Esercizio 570
(File scaricato da <http://www.extrabyte.info>)

Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x^4 + 3}{x}$$

Soluzione

Insieme di definizione

La funzione è definita in $X = \mathbb{R} - \{0\}$

Simmetrie

$f(-x) \neq \pm f(x) \implies f$ non è nè pari e nè dispari.

Intersezioni con gli assi

Intersezione con l'asse x :

$$\nexists x \in X \mid f(x) = 0 \implies \nexists P \in \gamma \cap x$$

essendo γ il diagramma cartesiano della funzione.

Intersezione con l'asse y :

$$0 = x \notin X \implies \nexists P \in \gamma \cap y$$

Studio del segno

$$f(x) > 0 \iff \frac{x^4 - 3}{x} > 0 \iff x \in (0, +\infty)$$

Comportamento agli estremi e ricerca degli asintoti

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

Quindi l'asse y è asintoto verticale.

I limiti seguenti si calcolano immediatamente per confronto tra infiniti:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$$

Calcoliamo:

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty$$

Pertanto non esistono asintoti obliqui.

Calcolo delle derivate

Un calcolo diretto porge:

$$f'(x) = \frac{3(x^4 - 1)}{x^2}$$

$$f''(x) = 6\frac{x^4 + 4}{x^3}$$

Studio della monotonia e ricerca degli estremi relativi ed assoluti

Determiniamo i punti estremali, che come è noto sono gli zeri della derivata prima:

$$f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$$

Studiamo il segno di $f'(x)$:

$$\forall x \in X, f'(x) \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$$

Quindi la funzione è strettamente crescente in $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$, ed è strettamente decrescente altrove. Ciò implica:

$$x_1 = -1 \text{ punto di massimo relativo con } f(-1) = -4$$

$$x_1 = 1 \text{ punto di massimo relativo con } f(1) = 4$$

La funzione è priva di estremi assoluti.

Concavità e punti di flesso

$$\nexists x \in X \mid f''(x) = 0 \implies \nexists \text{ punti di flesso}$$

Studiamo il segno della derivata seconda:

$$f''(x) > 0 \iff x \in (0, +\infty)$$

Quindi γ è concavo verso l'alto in $(0, +\infty)$, ed è concavo verso il basso altrove.

Il grafico è riportato in figura (1).

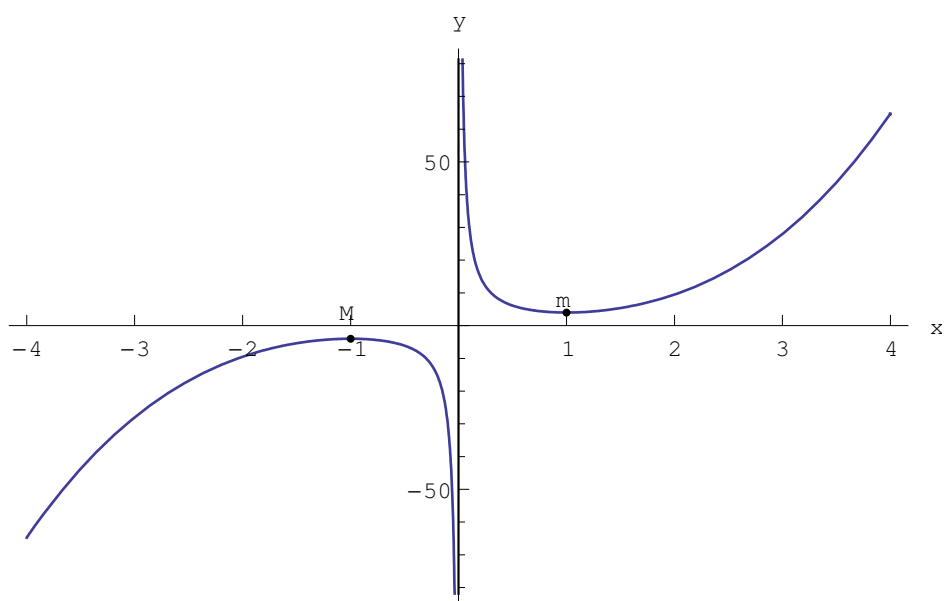


Figure 1: Grafico della funzione assegnata.