$$f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - 1$$

- __Dominio__

$$\begin{cases} x \neq 0 \\ 1-x^2 \geq 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ x^2 \leq 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x \neq 0 \\ -1 \leq x \leq 1 \end{cases} \qquad D = [-1, 0[\cup]0, 1]$$

- __Segno__

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - 1 > 0 \implies \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{x} > 0$$

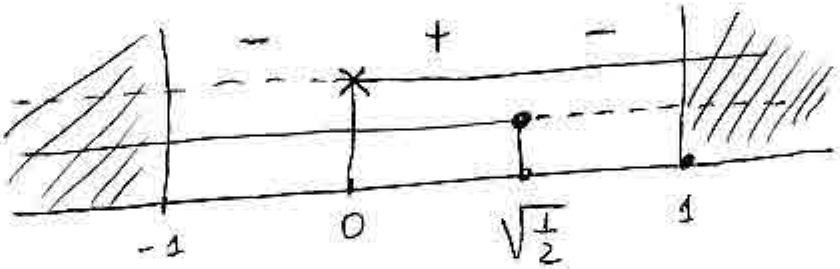
$\#$ $\sqrt{1-x^2} - x > 0 \longrightarrow \sqrt{1-x^2} > x$

$$\implies \begin{cases} x \geq 0 \\ 1-x^2 > x^2 \end{cases} \vee \begin{cases} x < 0 \\ \cancel{\forall x \in D} \end{cases} \implies \begin{cases} x \geq 0 \\ 2x^2 < 1 \end{cases} \vee \quad x < 0$$

$$\begin{cases} x \geq 0 \\ -\sqrt{\frac{1}{2}} < x < \sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases} \vee \quad x < 0 \implies 0 \leq x < \sqrt{\frac{1}{2}} \vee \quad x < 0$$

$\implies x < \sqrt{\frac{1}{2}} \simeq 0{,}71$

$\#$ $x > 0$



Tenendo presente il dominio, scartiamo le parte che non ci interessa e si ha:

$f(x) > 0 \qquad 0 < x < \sqrt{\frac{1}{2}}$

$f(x) < 0 \qquad -1 \leq x < 0 \vee \sqrt{\frac{1}{2}} < x \leq 1$

$f(x) = 0 \qquad x = \sqrt{\frac{1}{2}}$

- Intersezioni con gli assi

$* \ \vec{x} \begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \frac{\sqrt{1-x^2} - x}{x} = 0 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} \sqrt{1-x^2} = x \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 1-x^2 = x^2 \\ y = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} 2x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm\sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = 0 \end{cases}$ Siccome per elevare al quadrato deve essere soddisfatta la concordanza di segno $\Rightarrow -\sqrt{\frac{1}{2}}$ non è accettabile

$\Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{\frac{1}{2}} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \underline{\underline{A\left(\sqrt{\frac{1}{2}}; 0\right)}}$

$* \ \vec{y} \begin{cases} \nexists \text{ intersezione} \\ x = 0 \end{cases}$

- <u>Asintoti</u>

Non esistono asintoti orizzontali e obliqui perché il Dominio è un insieme limitato

<u>Asintoti verticali</u>

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \left[\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - 1\right] = \frac{1}{0} - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \to 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \to 0^-} f(x) = -\infty \end{cases}$$

$x = 0$ è ASINTOTO VERTICALE DX e SN

$f(-1) = -1$ $\qquad f(1) = -1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}} \cdot (-\cancel{2}x) \cdot x - \sqrt{1-x^2}}{x^2} =$$

$$= \frac{\frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}} - \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{\cancel{-x^2} - 1 + \cancel{x^2}}{x^2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{1}{x^2\sqrt{1-x^2}}$$

$D' = D - \{\pm 1\}$

$\lim_{x \to -1} f'(x) = -\infty \qquad \lim_{x \to 1} f'(x) = -\infty$

$\Rightarrow$ i punti ± 1 sono punti a tangente verticale

Inoltre, poiché il denominatore è sempre positivo si ha:

$f'(x) \geq 0$ Impossibile

$f'(x) < 0 \quad \forall x \in D'$ sempre DECRESCENTE

$$f''(x) = \frac{+2x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{1-x^2}}(-\cancel{2}x)\,x^2}{\left[x^2\sqrt{1-x^2}\right]^2} =$$

$$= \frac{2x(1-x^2) - x^3}{\sqrt{1-x^2}\left[x^2\sqrt{1-x^2}\right]^2} =$$

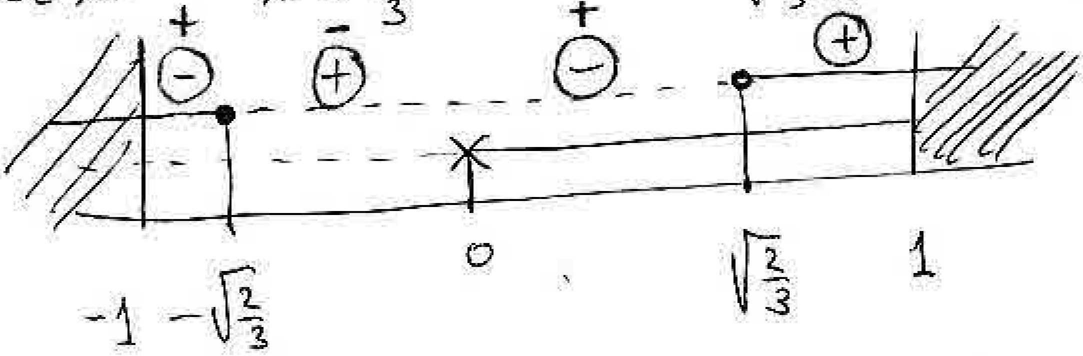
$$= \frac{2x - 2x^3 - x^3}{\sqrt{1-x^2}\left[x^2\sqrt{1-x^2}\right]^2} = \frac{-3x^3 + 2x}{*} \qquad D'' = D'$$

Il segno della $f''(x)$ dipende solo dal numeratore

$\Rightarrow \quad -3x^3+2x>0 \qquad 3x^3-2x<0 \qquad x\cdot(3x^2-2)<0$

$x>0$

$3x^2-2>0 \qquad x^2>\frac{2}{3} \qquad x<-\sqrt{\frac{2}{3}} \ \vee \ x>\sqrt{\frac{2}{3}}$



Tenendo presente sempre il dominio, escludendo i valori che non ci interessano otteniamo:

$f''(x)<0 \qquad -\sqrt{\frac{2}{3}}<x<0 \quad \vee \quad \sqrt{\frac{2}{3}}<x<1$ CONCAVITÀ VERSO BASSO

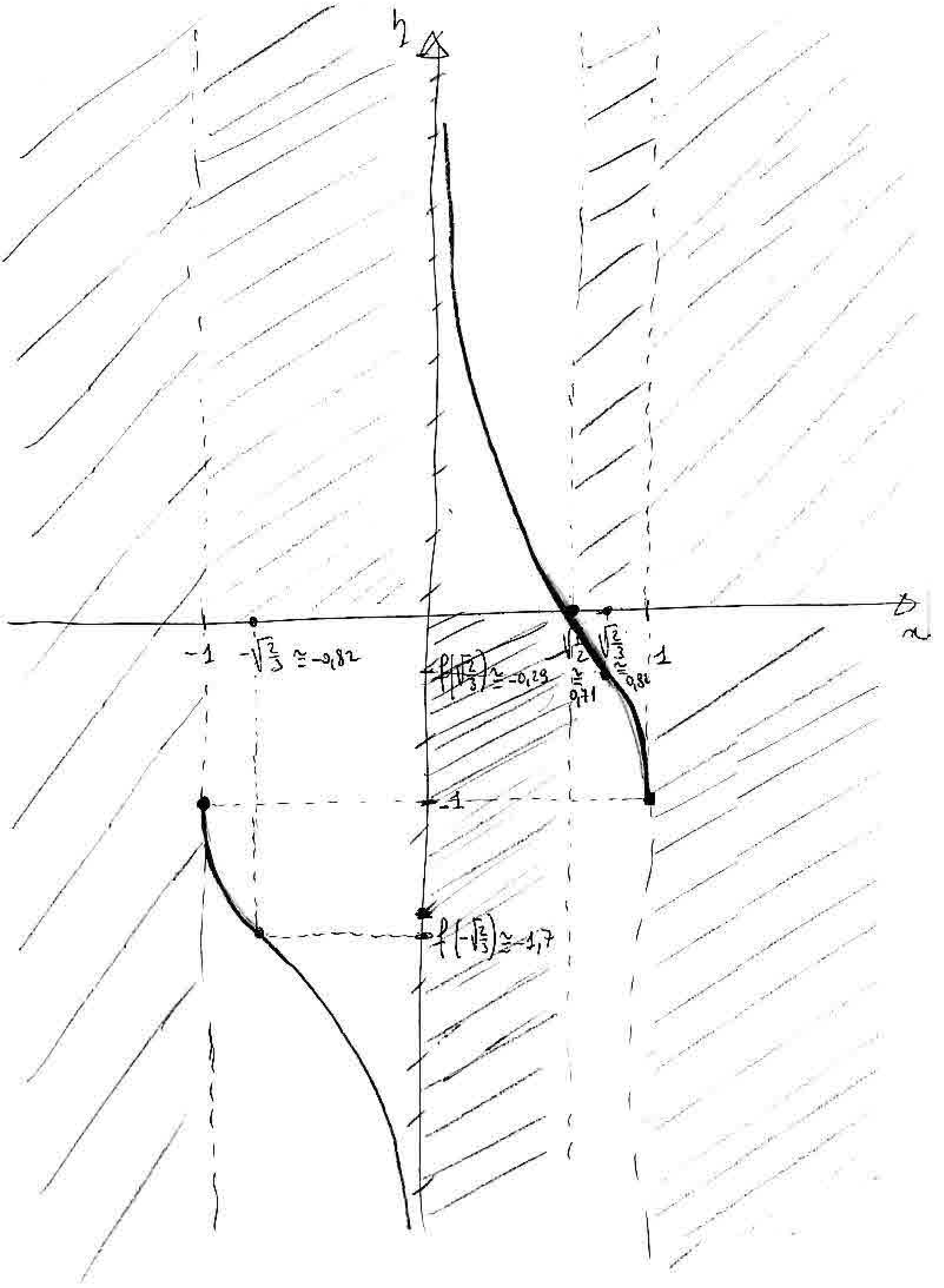
$f''(x)>0 \qquad -1<x<-\sqrt{\frac{2}{3}} \quad \vee \quad 0<x<\sqrt{\frac{2}{3}}$ CONCAVITÀ VERSO ALTO

$f''(x)=0 \qquad x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$

Siccome nei punti $\pm\sqrt{\frac{2}{3}}$ passando da sinistra a destra la concavità cambia e la funzione è continua in tali punti, possiamo dire che essi sono punti di <u>flesso</u>

$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{\sqrt{1-\frac{2}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}-1=\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{\sqrt{\frac{2}{3}}}-1=\sqrt{\frac{1}{2}}-1\cong \underline{-0{,}29}$

$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{\sqrt{1-\frac{2}{3}}}{-\sqrt{\frac{2}{3}}}-1=\frac{\sqrt{\frac{1}{3}}}{-\sqrt{\frac{2}{3}}}-1=-\sqrt{\frac{1}{2}}-1\cong \underline{-1{,}7}$



-1
$-\sqrt{\frac{2}{3}} \cong -0{,}82$
$f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cong -0{,}29$
$\sqrt{\frac{1}{2}} \cong 0{,}71$
$\sqrt{\frac{2}{3}}$ 0,82
1
-1
$f\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \cong -1{,}7$