② $f(x) = \frac{x^2}{e} + e^{-x^2}$ Funzioni PARI

GR. SIMMETRICO ALL'ASSE Y

- Dominio $\mathbb{R}$

- Segno

Poichè il secondo addendo è sempre positivo e il primo termine non è negativo $\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in D$

$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in D$

$f(x) \leq 0$ IMPOSSIBILE

- Intersezione con gli assi

$\vec{x} \begin{cases} \text{IMPOSSIBILE per quanto detto prima} \\ y = 0 \end{cases}$

$\vec{y} \begin{cases} y = 0 + e^{-0} = e^{0} = 1 \\ x = 0 \end{cases}$ $A(0,1)$ l'unico punto in comune con l'asse y

- Asintoti

ORIZZONTALI

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e} + e^{-x^2} = +\infty + 0 = +\infty$$

Non esistono asintoti ORIZZONTALI

OBLIQUI

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{e} + \frac{e^{-x^2}}{x} = +\infty + 0 = +\infty$$

NON ESISTONO ASINTOTI OBLIQUI

VERTICALI

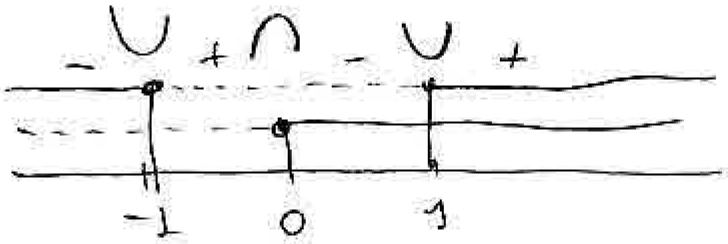
Non esistono punti di discontinuità e quindi non esistono asintoti verticali.

• $f'(x) = \frac{2x}{e} + e^{-x^2}(-2x)$ $\qquad D' = D = \mathbb{R}$

$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{2x}{e} - 2x\, e^{-x^2} = 2x\left(\frac{1}{e} - e^{-x^2}\right)$

$x > 0$

$\frac{1}{e} - e^{-x^2} > 0 \qquad e^{-x^2} < e^{-1} \qquad -x^2 < -1 \qquad x^2 > 1 \qquad x > 1 \checkmark \quad x < -1$



$f'(x) > 0 \qquad x > 1 \lor -1 < x < 0 \qquad$ CRESCENTE

$f'(x) < 0 \qquad x < -1 \qquad 0 < x < 1 \qquad$ DECRESC.

$f'(x) = 0 \qquad x = -1 \lor x = 0 \lor x = 1 \qquad$ PUNTI CRITICI

Siccome a sinistra decresce e a destra cresce i punti $-1, 1$ sono punti di MINIMO $f(-1) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \cong 0{,}74$

Siccome a sinistra cresce e a destra decresce il punto 0 è un punto di MASSIMO $\qquad f(1) = \frac{1}{e} + \frac{1}{e} = \frac{2}{e} \cong 0{,}74$

$f(0) = 0 + e^0 = 1$

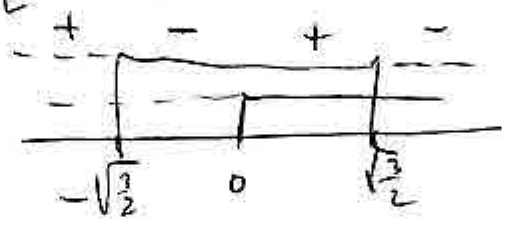
• $f''(x) = \frac{2}{e} + \left[e^{-x^2}(-2x)(-2x) + (-2)\,e^{-x^2}\right]$

$= \frac{2}{e} + 4x^2 e^{-x^2} - 2e^{-x^2} = \frac{2}{e} + 2e^{-x^2}\left[2x^2 - 1\right] = g(x)$

Calcoliamo la derivata di questa funzione:

$g'(x) = 2e^{-x^2}(-2x)(2x^2-1) + 4x \cdot 2e^{-x^2} = 2e^{-x^2}\left[-4x^3 + 2x + 4x\right]$

$= 2e^{-x^2}\left[6x - 4x^3\right] = 2e^{-x^2} x\left[6 - 4x^2\right]$



$x > 0$

$6 - 4x^2 > 0 \qquad x^2 < \frac{3}{2} \qquad -\sqrt{\frac{3}{2}} < x < \sqrt{\frac{3}{2}}$

Possiamo dire che la funzione cresce fino al punto $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ e poi decresce - - - -

$$g\left(-\sqrt{\tfrac{3}{2}}\right) = \frac{2}{e} + 2e^{-\frac{3}{2}}\left[2\cdot\tfrac{3}{2} - 1\right] = \frac{2}{e} + 2e^{-\frac{3}{2}}\cdot 2 = \frac{2}{e} + 4e^{-\frac{3}{2}} > 0$$

Da qui a zero decresce - -

$$g(0) = \frac{2}{e} + 2e^{0}\left[0-1\right] = \frac{2}{e} + 2(-1) = \frac{2}{e} - 2 < 0$$

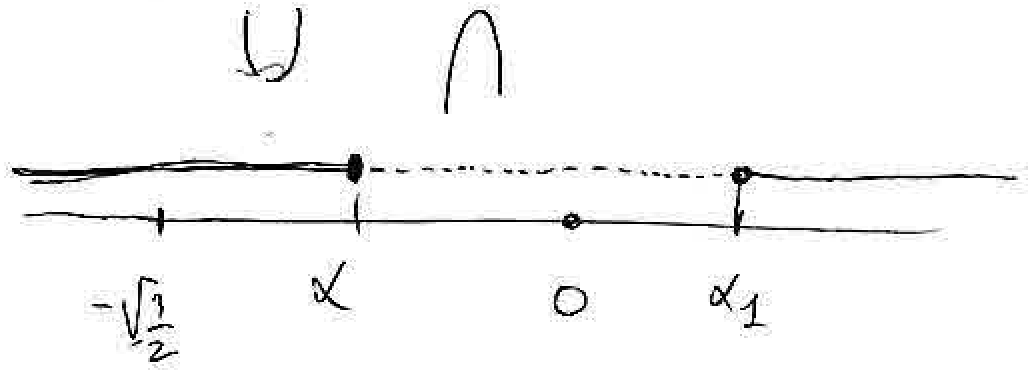
$$\Rightarrow \exists\ \alpha \in \left]-\sqrt{\tfrac{3}{2}}, 0\right[: \quad g(\alpha) = 0$$

$$\exists\ \alpha_1 \in \left]0, \sqrt{\tfrac{3}{2}}\right[: \quad g(\alpha_1) = 0$$

$$\lim_{x\to\pm\infty} g(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{e} + \frac{4x^2-2}{e^{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \frac{2}{e} \quad \frac{8\cancel{x}}{e^{x^2}\,2\cancel{x}} = 0$$

Pertanto



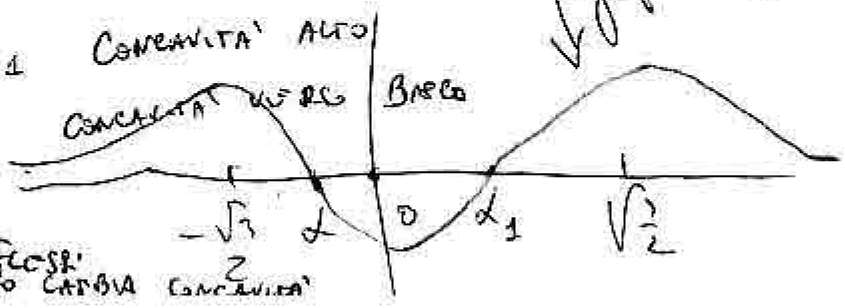
Cioè la funzione cresce fino a $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ mantenendosi positiva

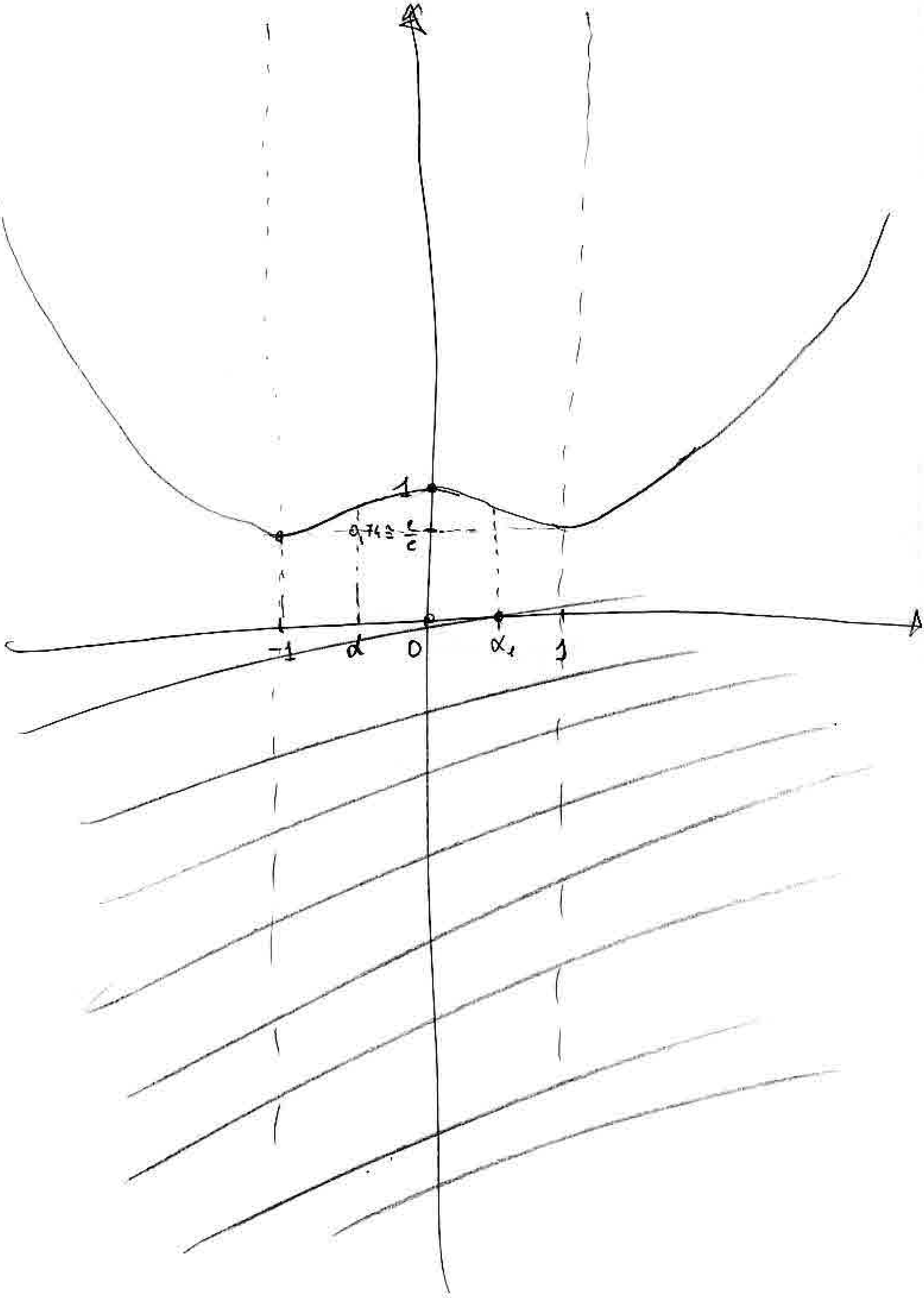
Decresce da $-\sqrt{\frac{3}{2}}$ a 0 e si annulla

$f''(x) > 0 \qquad x < \alpha \quad \vee \quad x > \alpha_1$

$f''(x) < 0 \qquad \alpha < x < \alpha_1$

$f''(x) = 0 \qquad x = \alpha \quad \vee \quad x = \alpha_1$





1
0,74 ≃ 2/e
-1
α
0
α₁
1