① $\boxed{f(x) = \log \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-1}}}$

FUNZIONE PARI CIOE' GRAFICO SIMM. ALL'ASSE y

- Dominio

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} > 0 \\ x^4-1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ (x^2-1)(\underbrace{x^2+1}_{\text{sempre positivo}}) > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x<-1 \vee x>1 \end{cases}$$

$$D = \,]-\infty, -1[\, \cup \,]1, +\infty[$$

- Segno

$$\log \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} > 0 \longrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} > 1 \longrightarrow \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} - 1 > 0$$

$$\frac{x^2 - \sqrt{x^4-1}}{\sqrt{x^4-1}} > 0 \longrightarrow x^2 - \sqrt{x^4-1} > 0 \longrightarrow x^2 > \sqrt{x^4-1}$$

Elevando al quadrato

$$\cancel{x^4} > \cancel{x^4} - 1 \qquad 0 > -1 \qquad \forall x \in D$$

$$\Rightarrow f(x) > 0 \quad \forall x \in D$$

$$f(x) \leq 0 \quad \text{IMPOSSIBILE}$$

- Intersezione con gli assi

$$\vec{x} \begin{cases} \log \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} = 0 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \text{Impossibile} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\vec{y} \begin{cases} \text{IMPOSSIBILE} \\ x = 0 \end{cases}$$

<u>Non ci sono intersezioni con gli assi</u>

- Asintoti:

ORIZZONTALI

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} \log \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} = \lim_{x\to\pm\infty} \log \frac{x^2}{\sqrt{x^4\left(1-\frac{1}{x^4}\right)}} =$$

$$= \lim_{x\to\pm\infty} \log \frac{x^2}{\sqrt{x^4}\,\sqrt{1-\frac{1}{x^4}}} = \lim_{x\to\pm\infty} \log \frac{\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}\sqrt{1-\underbrace{\frac{1}{x^4}}_{\to 0}}} = 1$$

$\Rightarrow$ $y = 1$ ASINTOTO ORIZZONTALE DX E SN.

VERTICALI

$$\lim_{x\to -1^-} f(x) = \lim_{x\to -1^-} \log \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} = \log \frac{1}{0} = \log +\infty = +\infty$$

$x = -1$ ASINTOTO VERT. SN.

$$\lim_{x\to +1^+} f(x) = \lim_{x\to +1^+} \log \frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}} = \log \frac{1}{0} = \log +\infty = +\infty$$

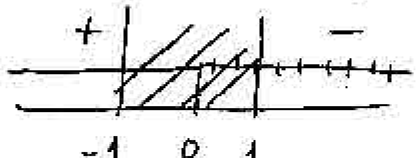
$x = +1$ ASINTOTO VERT. DX

- $$f'(x) = \frac{1}{\frac{x^2}{\sqrt{x^4-1}}} \cdot \frac{2x\sqrt{x^4-1} - \frac{1}{2\sqrt{x^4-1}}\,4x^3\cdot x^2}{x^4-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x^4-1}}{x^2} \cdot \frac{\frac{4x(x^4-1) - 4x^5}{2\sqrt{x^4-1}}}{x^4-1} =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{x^4-1}}}{x^{\cancel{2}}} \cdot \frac{\cancel{4x^5} - 4x - \cancel{4x^5}}{(x^4-1)\left(2\cancel{\sqrt{x^4-1}}\right)} = \frac{-4}{2x(x^4-1)} = -\frac{2}{x(x^4-1)}$$

Siccome per i valori del dominio $x^4-1>0$, il segno dipende da quello di x. Pertanto:



$f'(x) > 0$ $\quad x < -1$ $\quad$ CRESCENTE

$f'(x) < 0$ $\quad x > 1$ $\quad$ DECRESCENTE

$f'(x) = 0$ $\quad$ IMPOSSIB.

$$f''(x) = \frac{-[-(x^4-1) + 4x^3 x](-2)}{[x(x^4-1)]^2} = + \frac{2(x^4-1+4x^4)}{[x(x^4-1)]^2} = \frac{2(+5x^4-1)}{[x(x^4-1)]^2}$$

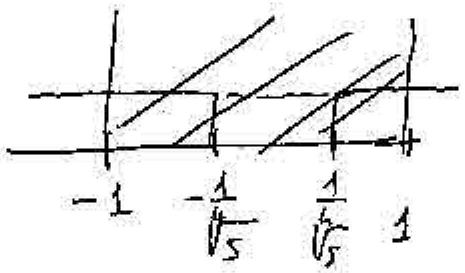
Il segno della derivata seconda dipende da quello di $+5x^4-1$

$+5x^4-1>0$ $\qquad 5x^4-1>0$

$$\Rightarrow (\sqrt{5}\,x^2-1)\underbrace{(\sqrt{5}\,x^2+1)}_{\text{sempre positivo}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \sqrt{5}\,x^2-1>0$$

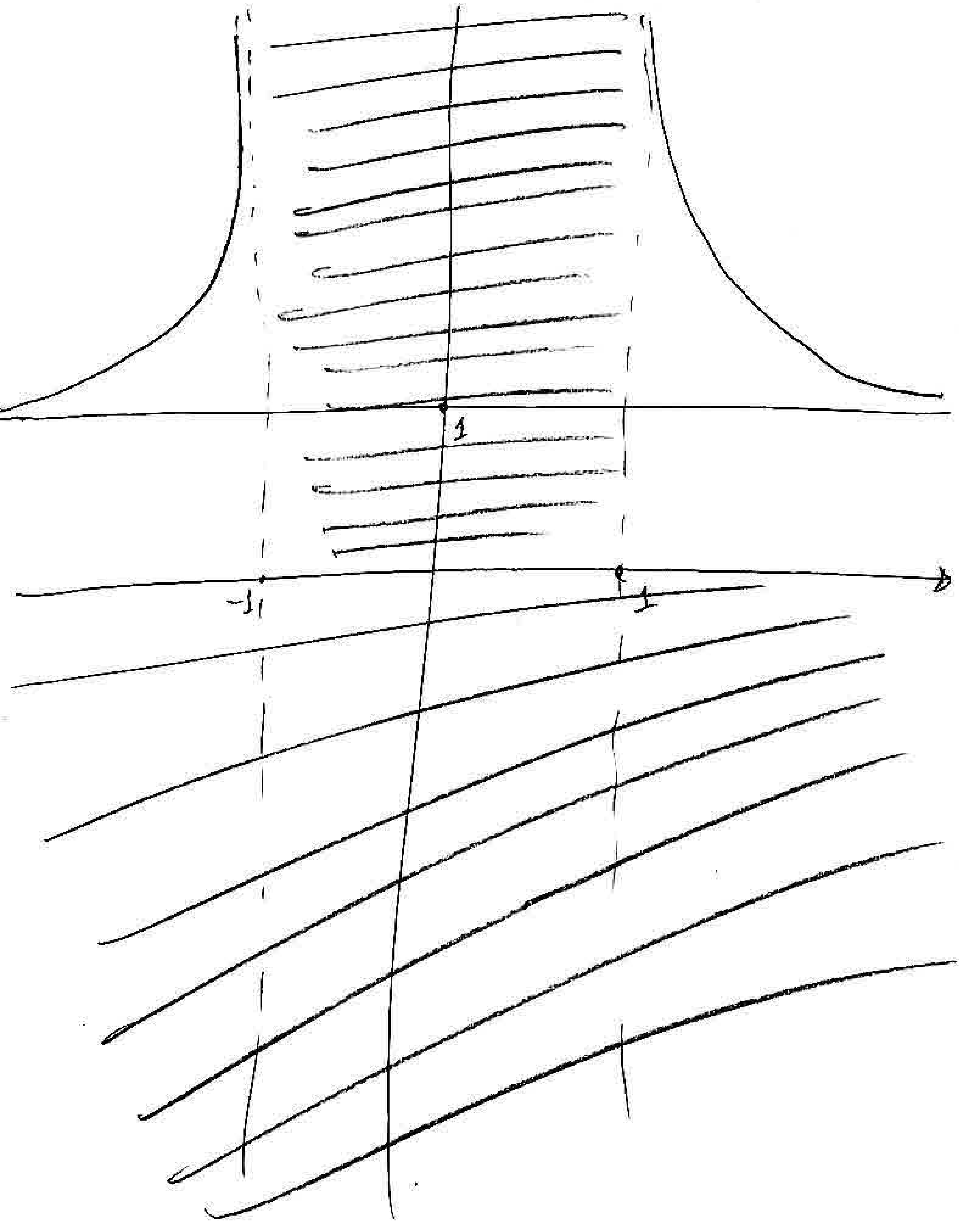
$$\Rightarrow \quad \sqrt{5}\,x^2 > 1 \qquad x^2 > \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\Rightarrow \quad x < -\frac{1}{\sqrt[4]{5}} \;\vee\; x > \frac{1}{\sqrt[4]{5}}$$



$f''(x) \leq 0$ $\quad$ IMPOSSIBILE

$f''(x) > 0 \quad \forall x \in D''$. CONCAVITÀ VERSO L'ALTO


1
-1
1