Studiare la funzione e rappresentarla in un piano cartesiano ortogonale:

$$y = \ln\frac{x}{x+2}$$

Classificazione

Si tratta di una funzione logaritmica con argomento fratto

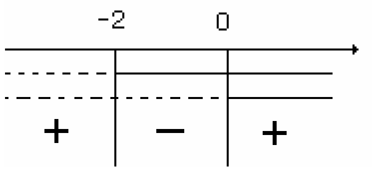
Dominio

Il dominio si determina imponendo il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{x}{x+2} > 0 \\ x+2 \neq 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{x}{x+2} > 0$$ (la diseguaglianza è inclusa nella disequazione) $\Rightarrow$

N = x>0

D = x+2>0 →x>-2

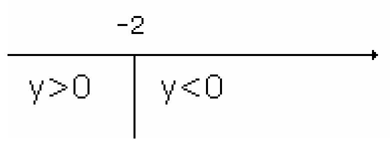


Quindi D_f: $\forall\, x \in\ ]-\infty\ ;\ -2\ [\ \cup\ ]\ 0\ ;\ +\infty\ [$

Determinazione degli intervalli di positività / negatività

$$y = \ln\frac{x}{x+2} > 0 \to \ln\frac{x}{x+2} > \ln 1 \to \begin{cases} \dfrac{x}{x+2} > 0 \\ \dfrac{x}{x+2} > 1 \end{cases} \to \frac{x}{x+2} > 1$$ (la prima disequazione è sempre verificata nel Dominio D_f)

$$\frac{x}{x+2} > 1 \to \frac{x-x-2}{x+2} > 0 \to \frac{-2}{x+2} > 0 \to x+2 < 0 \to x < -2$$



Intersezione con gli assi cartesiani

Poiché $x = 0 \notin D_f$ non ci sono intersezioni con l'asse delle ordinate.

$y = 0$ quando $\ln\dfrac{x}{x+2} = 0 \to \dfrac{x}{x+2} = 1 \to \dfrac{-2}{x+2} = 0 \to -2 = 0$ che è impossibile, quindi la funzione non ha intersezioni neanche con l'asse delle ascisse.

Andamento della funzione agli estremi del Dominio

Dobbiamo calcolare i limiti

1) $\lim\limits_{x\to\mp\infty} \ln\dfrac{x}{x+2} = \ln \lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x}{x+2} = \ln \lim\limits_{x\to\mp\infty} \dfrac{x}{x} = \ln \lim\limits_{x\to\mp\infty} 1 = \ln 1 = 0$

2) $\lim\limits_{x\to -2^-} \ln\dfrac{x}{x+2} = \ln \lim\limits_{x\to -2^-} \dfrac{x}{x+2} = \ln(+\infty) = +\infty$ (dove abbiamo tenuto conto del fatto che l'argomento del logaritmo in un intorno sinistro di -2 è positivo)

3) $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln\dfrac{x}{x+2} = \ln \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{x}{x+2} = \ln(0^+) = -\infty$ (dove abbiamo tenuto conto del fatto che l'argomento del logaritmo in un intorno destro di 0 è positivo)

Asintoti

Il risultato del limite 1) ci dice che la retta y = 0 (asse delle ascisse) è un asintoto orizzontale.

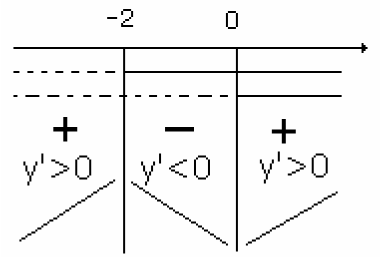
I risultati 2) e 3) ci dicono che le rette x = -2 e x = 0 sono degli asintoti verticali

Calcolo della derivata prima

$$y' = \frac{x+2}{x}\left[\frac{x+2-x}{(x+2)^2}\right] = \frac{2}{x(x+2)}$$

Studio della derivata prima – Determinazione degli intervalli di crescenza / decrescenza – Massimi e Minimi relativi e assoluti

$$y' = \frac{2}{x(x+2)} > 0 \rightarrow \begin{array}{l} D_1 = x > 0 \\ D_2 = x+2 > 0 \rightarrow x > -2 \end{array}$$



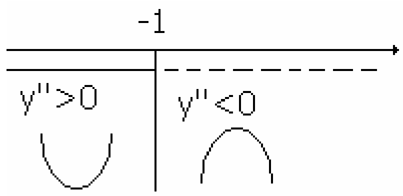
Dallo schema si deduce che la funzione non ha né max né min infatti x = -2 e x = 0 non appartengono al Dominio

Calcolo della derivata seconda

$$y'' = \frac{-2(2x+2)}{x^2(x+2)^2} = \frac{-4(x+1)}{x^2(x+2)^2}$$

Studio della derivata seconda – Concavità – Flessi

$$y'' = \frac{-4(x+1)}{x^2(x+2)^2} > 0 \rightarrow x+1 < 0 \rightarrow x < -1$$



La funzione non ha flessi poiché x = -1 non appartiene al Dominio

Grafico