Studiare la seguente funzione:

$$y = \frac{|x-1|}{\ln|x-1|}$$

1. C.E.: $|x-1| \neq 0 \Rightarrow x \neq 1$ inoltre $|x-1| \neq 1 \Rightarrow x \neq 2 \vee x \neq 0$.

2. Intersezioni: nessuna, infatti x non puó assumere il valore nullo, mentre per $y = 0$ otteniamo $x = 1$ che é escluso dal campo di esistenza.

3. Segno: $|x-1| \geq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$ mentre $\ln|x-1| > 0 \Leftrightarrow |x-1| > 1 \Leftrightarrow x < 0 \vee x > 2$. La funzione risulta positiva per $x < 0 \vee x > 2$.

4. Simmetrie: nessuna evidente (la funzione risulta in veritá simmetrica rispetto alla retta $x = 1$).

5. Limiti (e calcolo degli asintoti): calcoliamo i limiti in 0, 1, 2, $+\infty$, $-\infty$.

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{|x-1|}{\ln|x-1|} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{|x-1|}{\ln|x-1|} = +\infty$$

La retta $x = 0$ é pertanto asintoto verticale.

$$\lim_{x\to 1} \frac{|x-1|}{\ln|x-1|} = 0$$

In $x = 1$ abbiamo pertanto una discontinuitá eliminabile.

$$\lim_{x\to 2^+} \frac{|x-1|}{\ln|x-1|} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{|x-1|}{\ln|x-1|} = -\infty$$

La retta $x = 2$ risulta pertanto un asintoto verticale.

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{|x-1|}{\ln|x-1|} = \lim_{x\to +\infty} \frac{x-1}{\ln(x-1)} \overset{H}{=} \lim_{x\to +\infty} x - 1 = +\infty$$

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{|x-1|}{\ln|x-1|} = \lim_{x\to -\infty} \frac{-x+1}{\ln(-x+1)} \overset{H}{=} \lim_{x\to -\infty} -x + 1 = +\infty$$

Non abbiamo pertanto asintoti orizzontali. Proviamo a cercare quelli obliqui.

$$\lim_{x\to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to \infty} \frac{|x-1|}{x \cdot \ln|x-1|} = 0$$

Pertanto non vi possono essere asintoti obliqui.

6. Derivata prima (studio della crescenza): per studiare la derivata dobbiamo prima eliminare il modulo.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x-1}{\ln(x-1)} & x > 1 \\ \frac{1-x}{\ln 1-x} & x < 1 \end{cases}$$

Otteniamo dunque

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{\ln(x-1)-1}{\ln^2(x-1)} & x > 1 \\ \frac{1-\ln(1-x)}{\ln^2(1-x)} & x < 1 \end{cases}$$

Studiamo il segno per $x > 1$. Il denominatore é sempre positivo nel suo campo di esistenza. Il numeratore invece é positivo se $\ln(x-1)-1 > 0 \Leftrightarrow x-1 > e \Leftrightarrow x > 1+e$. Pertanto la funzione risulta crescente per $x > 1+e$ e decrescente tra $1 < x < 1+e$. Studiamo il segno per $x < 1$. Il denominatore é sempre positivo nel suo campo di esistenza. Il numeratore invece é positivo se $1 - \ln(1-x) > 0 \Leftrightarrow 1-x < e \Leftrightarrow x > 1-e$. Pertanto la funzione risulta crescente per $1-e < x < 1$ e decrescente tra $x < 1-e$. Per $x = 1 \pm e$ abbiamo due minimi locali ($y = e$).

7. Derivata seconda (concavitá): abbiamo

$$f''(x) = \begin{cases} \frac{2-\ln(x-1)}{(x-1)\ln^3(x-1)} & x > 1 \\ \frac{2-\ln(1-x)}{(1-x)\ln^3(1-x)} & x < 1 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli troviamo che la funzione ha la concavitá rivolta verso il basso per $x < 1-e^2 \vee 0 < x < 2 \vee x > 1+e^2$. Si veda la figura (3).

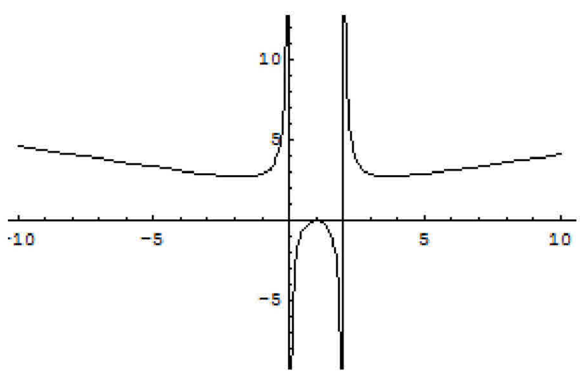

Figura 3: Il grafico di $y = \frac{|x-1|}{\ln|x-1|}$