Scomposizione in fattori di polinomi

1] ► Raccoglimento totale

Questo tipo di raccoglimento si applica quando tutti i termini del polinomio hanno "*qualcosa*" in comune: un numero o una lettera. In questo caso si mettono in evidenza i fattori comuni con il minore esponente e ogni termine del polinomio va diviso per tali fattori.

$$7a^2x^3-3a^3x^2-a^2x=a^2x\left(7x^2-3ax-1\right)$$

$$-10a^3+15a^2b-20ab^2=-5a\left(2a^2-3ab+4b^2\right)$$

2] ► Binomi con potenze dello stesso esponente

- a^2+b^2 (somma di quadrati). In questo caso *il polinomio non si può scomporre*. Come le somme di quadrati, non si possono scomporre tutti i binomi somme di potenze che hanno come esponente potenze di 2, cioè: a^4+b^4, a^8+b^8, $a^{16}+b^{16}$, … e così via.
- a^2-b^2 (differenza di quadrati). In questo caso si tolgono i quadrati e tra i due termini si inserisce una volta il segno positivo (+) e una volta il segno negativo (–).

$$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$$

- a^3+b^3 (somma di cubi). In questo caso si tolgono i cubi e si scrive lo stesso binomio senza cubi, poi va fatto nell'ordine il quadrato del primo termine, il prodotto dei due termini, il quadrato del secondo termine. I segni devono essere alternati partendo da (+).

$$a^3+b^3=(a+b)\left(a^2-ab+b^2\right)$$

- a^3-b^3 (differenza di cubi). Come il caso precedente, si tolgono i cubi e si scrive lo stesso binomio senza cubi, poi va fatto nell'ordine il quadrato del primo termine, il prodotto dei due termini, il quadrato del secondo termine. I segni devono essere tutti positivi (+)

$$a^3-b^3=(a-b)\left(a^2+ab+b^2\right)$$

ESEMPIO 1

$16x^2-9=(4x-3)(4x+3)$

ESEMPIO 2

$27-b^6y^9=3^3-\left(b^2y^3\right)^3=\left(3-b^2y^3\right)\left(9+3b^2y^3+b^4y^6\right)$

ESEMPIO 3

$x^6+a^3=\left(x^2\right)^3+a^3=\left(x^2+a\right)\left(x^4-x^2a+a^2\right)$

3] ► Trinomi

- $a^2+2ab+b^2$ (***trinomio con due quadrati e un doppio prodotto***). In questo caso si tolgono i quadrati e tra i due termini si inserisce il segno del doppio prodotto. Il tutto va elevato al quadrato.

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2$$

$$a^2-2ab+b^2=(a-b)^2$$

- x^2+ax+b (***trinomio caratteristico,*** *cioè* ***trinomio di secondo grado, il coefficiente del termine di secondo grado dev'essere* 1.**

In questo caso devono essere determinati due numeri che moltiplicati tra loro ci diano il termine noto "b" e sommati tra loro ci diano il coefficiente del termine di primo grado "a". Trovati i detti numeri, si scrive la lettera col primo numero e la lettera col secondo numero, moltiplicando i termini tra loro.

<u>ESEMPIO 1</u>

$$x^2+7x+12=(x+4)(x+3)$$

In questo esempio i numeri richiesti sono +4 e +3.

<u>ESEMPIO 2</u>

$$x^2-8x+15=(x-5)(x-3)$$

In questo esempio i numeri richiesti sono –5 e –3.

<u>ESEMPIO 3</u>

$$x^2+2x-35=(x+7)(x-5)$$

In questo esempio i numeri richiesti sono +7 e –5.

4] ► Quadrinomi (***<u>due cubi e due tripli prodotti</u>***)

- $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$. In questo caso si tolgono i due cubi e il tutto va elevato al cubo

$$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3=(a+b)^3$$
$$a^3-3a^2b+3ab^2-b^3=(a-b)^3$$

<u>ESEMPIO 1</u>

$27x^3y^3+27x^2y^2+9xy+1=(3xy+1)^3$

<u>ESEMPIO 2</u>

$a^3-6a^2b+12ab^2-8b^3=(a-2b)^3$

5] ► Polinomi con sei termini (***<u>tre quadrati e tre doppi prodotti</u>***)

$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$. In questo caso si tolgono i tre quadrati e il tutto va elevato al quadrato. Per determinare i segni si deve svolgere il quadrato di trinomio.

$$a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc=(a+b+c)^2$$

<u>ESEMPIO 1</u>

$a^2+4b^2+9c^2-6ac-12bc+4ab=(a+2b-3c)^2$

<u>ESEMPIO 2</u>

$a^6-2a^4-2a^3+a^2+2a+1=\left(a^3-a-1\right)^2$

6] ► Raccoglimento parziale.

Questo tipo di scomposizione va fatta con alcuni termini del polinomio raggruppati applicando le regole precedenti. Con questa regola è importante **<u>che ci siano almeno due passaggi</u>** nel secondo dei quali deve essere applicata la regola della scomposizione totale.

7] ► Regola di Ruffini

Con questo tipo di scomposizione viene applicata la regola di Ruffini. Prima di ciò si deve trovare lo zero del polinomio, cioè quel numero che sostituito alla variabile annulla tutto il polinomio.