

Studio di funzioni

D. Catania

Simboli matematici usati comunemente :

- \exists : esiste
- \nexists : non esiste
- \in : appartiene, appartenente
- \forall : per ogni, per tutti, qualunque sia
- \Rightarrow : ne segue, implica

1. Equazioni e disequazioni

1.1. Equazioni di secondo grado

L'equazione di secondo grado completa si presenta nella forma: $ax^2 + bx + c = 0$. Le soluzioni sono:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Il termine sotto radice $b^2 - 4ac$ viene chiamato **discriminante** dell'equazione e si indica con il simbolo Δ . Le soluzioni di una equazione dipendono dal discriminante. Infatti:

- ✓ Se $\Delta > 0$ ci sono due soluzioni reali e distinte x_1 ed x_2 (una con + e una con -)
- ✓ Se $\Delta = 0$ vi è una sola soluzione (due soluzioni reali e coincidenti $x_1 = x_2$)
 Infatti, poiché $\sqrt{0} = 0$, $\pm 0 = 0$
- ✓ Se $\Delta < 0$ non ci sono soluzioni reali. Infatti, la radice di un numero negativo non esiste.

◆ **ESEMPIO 1** $4x^2 - 5x + 1 = 0$ **completa**

Sapendo che $a = 4$, $b = -5$, $c = 1$ si ha:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

Poiché il discriminante è positivo, l'equazione avrà due soluzioni distinte. Pertanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2 \cdot 4} = \frac{5 \pm 3}{8} = \begin{cases} \frac{5+3}{8} = \frac{8}{8} = 1 \\ \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

◆ **ESEMPIO 2** $5x^2 - 8x + 5 = 0$ **completa**

Sapendo che $a = 5$, $b = -8$, $c = 5$ si ha:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-8)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 5 = 64 - 100 = -36$$

Poiché il discriminante è negativo, l'equazione è impossibile.

◆ **ESEMPIO 3** $9x^2 + 12x + 4 = 0$ **completa**

Sapendo che $a = 9$, $b = 12$, $c = 4$ si ha:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (12)^2 - 4 \cdot 9 \cdot 4 = 144 - 144 = 0$$

Poiché il discriminante è uguale a zero, l'equazione avrà due soluzioni coincidenti, cioè una soluzione doppia. Pertanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 9} = \frac{-12 \pm 0}{18} = \begin{cases} \frac{-12+0}{18} = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3} \\ \frac{-12-0}{18} = -\frac{12}{18} = -\frac{2}{3} \end{cases} \text{ cioè abbiamo la soluzione doppia } x = -\frac{2}{3}$$

Casi particolari

1. Se nell'equazione di secondo grado manca il termine di primo grado, cioè la x , l'equazione diventa:

$$ax^2 + c = 0$$

e si chiama equazione **pura**. Per risolverla è sufficiente portare il termine con l'incognita da una parte e il termine senza l'incognita dall'altra, tenendo presente sempre che quando un termine viene spostato da una parte all'altra deve essere sempre cambiato di segno; si ricava x^2 e poi si calcola la x prendendo la radice quadrata del II membro.

ESEMPIO 1: $4x^2 - 16 = 0$ **pura**

$$4x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{4}x^2 = \frac{16}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 = 4$$

Per risolvere tale equazione bisogna trovare, secondo quanto detto precedentemente, un numero il cui quadrato ci dia 4. Tenendo presente che qualsiasi numero (positivo o negativo che sia) quando viene elevato al quadrato risulta sempre positivo, le soluzioni della precedente equazione sono $\pm\sqrt{4}$ (cioè ± 2). Pertanto si ha: $x = \pm\sqrt{4} = \pm\sqrt{2^2} = \pm 2$

◆ **ESEMPIO 2** $4x^2 + 4 = 0$ **pura**

$$\Rightarrow 4x^2 = -4 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{4}x^2 = \frac{-4}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 = -1$$

Tenendo presente che qualsiasi numero elevato al quadrato è sempre positivo, non esiste alcun numero che elevato al quadrato ci dia -1 . L'equazione in questo caso è **impossibile**.

◆ **ESEMPIO 3** $2x^2 - 10 = 0$ **pura**

$$\Rightarrow 2x^2 = 10 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 5 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{5}$$

2. Se nell'equazione di secondo grado manca il termine noto (cioè la c), l'equazione diventa:

$$ax^2 + bx = 0$$

e si chiama equazione **spuria**. In questo caso si mette la x in evidenza (e quindi ogni termine viene diviso per x) e si scrive:

$$x(ax+b)=0$$

A questo punto si applica la cosiddetta **legge di annullamento del prodotto** che afferma:

un prodotto di due o più numeri è uguale a zero se e solo se almeno uno dei termini del prodotto è uguale a zero.

Pertanto affinché il prodotto risulti uguale a zero deve accadere che $x = 0 \vee$ (oppure) $ax + b = 0$

◆ **ESEMPIO 1:** $6x^2 - 16x = 0$ **spuria**

Mettendo x in evidenza si ha:

$$x(6x-16)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee 6x-16=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee 6x=16 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee x=\frac{16}{6}=\frac{8}{3}$$

◆ **ESEMPIO 2:** $x^2 - x = 0$ **spuria**

Mettendo x in evidenza si ha:

$$x(x-1)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee x-1=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee x=1$$

◆ **ESEMPIO 3:** $2x^2 - 3x = 0$ **spuria**

Mettendo x in evidenza si ha:

$$\Rightarrow x(2x-3)=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee 2x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee 2x=3 \quad \Rightarrow \quad x=0 \vee x=\frac{3}{2}$$

1.2. Diseguazioni di secondo grado

Per risolvere una disequazione di secondo grado $ax^2 + bx + c > 0$ oppure $ax^2 + bx + c < 0$ per prima cosa va risolta l'equazione completa o incompleta che sia.

✓ Se l'equazione ha due soluzioni x_1 ed x_2 , (cioè $\Delta > 0$) allora:

- $ax^2 + bx + c > 0$ ha per soluzioni valori esterni (cioè valori della x minori della più piccola e maggiori della più grande) $x < x_1 \vee x > x_2$

- $ax^2 + bx + c < 0$ ha per soluzioni valori interni (cioè valori della x compresi tra la più piccola e la più grande) $x_1 < x < x_2$
- ✓ Se l'equazione ha una sola soluzione, (cioè $\Delta = 0$) allora:
 - $ax^2 + bx + c > 0$ ha per soluzioni tutti i valori della x diversi dalla soluzione $\forall x \neq \text{soluzione}$
 - $ax^2 + bx + c < 0$ è impossibile
- ✓ Se l'equazione è impossibile, (cioè $\Delta < 0$) allora:
 - $ax^2 + bx + c > 0$ ha per soluzione $\forall x \in R$, in quanto il trinomio è sempre positivo
 - $ax^2 + bx + c < 0$ è impossibile

ESEMPIO 1 $x^2 - 5x + 4 > 0$ **completa**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 25 - 16 = 9$$

Poiché il discriminante è positivo, l'equazione associata avrà due soluzioni distinte. Pertanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2} = \frac{5 \pm 3}{2} = \begin{cases} \frac{5+3}{2} = \frac{8}{2} = 4 \\ \frac{5-3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

Le soluzioni della disequazione sono, dunque:

$x^2 - 5x + 4 > 0$ valori esterni ($x < 1 \vee x > 4$) $x^2 - 5x + 4 < 0$ valori interni ($1 < x < 4$)

ESEMPIO 2 $5x^2 - 2x + 3 > 0$ **completa**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 3 = 4 - 60 = -56$$

Poiché il discriminante è negativo, l'equazione è impossibile. Pertanto:

$5x^2 - 2x + 3 > 0 \quad \forall x \in R$ $5x^2 - 2x + 3 < 0$ Impossibile

ESEMPIO 3 $4x^2 - 12x + 9 > 0$ **completa**

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-12)^2 - 4 \cdot 4 \cdot 9 = 144 - 144 = 0$$

Poiché il discriminante è uguale a zero, l'equazione avrà due soluzioni coincidenti, cioè una soluzione doppia. Pertanto:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{12 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \frac{12 \pm 0}{8} = \begin{cases} \frac{12+0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \\ \frac{12-0}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{cases} \text{ cioè abbiamo la soluzione doppia } x = \frac{3}{2}$$

Le soluzioni della disequazione sono, dunque:

$4x^2 - 12x + 9 > 0 \quad \forall x \neq \frac{3}{2}$ $4x^2 - 12x + 9 < 0$ Impossibile

Se l'equazione è incompleta, bisogna risalire al Δ in base al numero di soluzioni che si ottengono:

◆ **ESEMPIO 1:** $4x^2 - 64 > 0$ **pura**

Risolviendo l'equazione associata si ottiene:

$$4x^2 = 64 \quad \Rightarrow \quad \frac{4}{4}x^2 = \frac{64}{4} = 16 \quad \Rightarrow \quad x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{16} = \pm 4$$

Poiché ci sono due soluzioni distinte (-4 e $+4$), allora possiamo scrivere:

$4x^2 - 64 > 0$ valori esterni ($x < -4 \vee x > 4$) $4x^2 - 64 < 0$ valori interni ($-4 < x < 4$)

◆ **ESEMPIO 2** $5x^2 + 30 > 0$ **pura**

Risolvendo l'equazione associata si ottiene:

$$5x^2 = -30 \quad \Rightarrow \quad x^2 = \frac{-30}{5} = -6 \quad \Rightarrow \quad x^2 = -6$$

Tenendo presente che qualsiasi numero elevato al quadrato è sempre positivo, non esiste alcun numero che elevato al quadrato ci dia -1 . L'equazione in questo caso è **impossibile**. Pertanto:

$$5x^2 + 30 > 0 \quad \forall x \in R$$

$$5x^2 + 30 < 0 \quad \text{Impossibile}$$

◆ **ESEMPIO 3** $2x^2 - 8x > 0$ **spuria**

Risolvendo l'equazione associata si ottiene:

$$2x^2 - 8x = 10 \quad \Rightarrow \quad x(2x - 8) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \vee x = 4$$

Poiché ci sono due soluzioni distinte (0 e 4), allora possiamo scrivere:

$$2x^2 - 8x > 0 \quad \text{valori esterni } (x < 0 \vee x > 4)$$

$$2x^2 - 8x < 0 \quad \text{valori interni } (0 < x < 4)$$

◆ **ESEMPIO 4** $x^2 > 0$ **monomia**

Risolvendo l'equazione associata si ottiene:

$$x^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \pm\sqrt{0} = \pm 0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0$$

Poiché vi è una sola soluzione, allora possiamo scrivere:

$$x^2 > 0 \quad \forall x \neq \text{soluzione } (\forall x \neq 0)$$

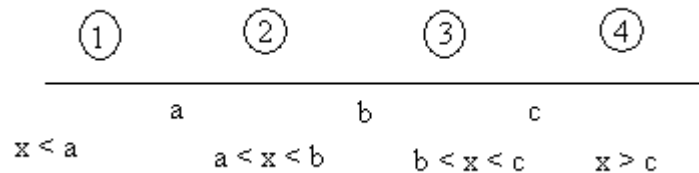
$$x^2 < 0 \quad \text{Impossibile}$$

2. La topologia della retta

2.1. Gli intervalli



Un **intervallo** è un sottoinsieme dei numeri reali che corrisponde ad una semiretta (intervallo illimitato) oppure ad un segmento (intervallo limitato).



Siano $a, b, c \in \mathbb{R}$. Tali punti dividono la retta in quattro zone:

- la zona 1 è caratterizzata da valori della x che sono minori di a ($x < a$)
- la zona 2 è caratterizzata da valori della x che sono compresi tra a e b ($a < x < b$):
- la zona 3 è caratterizzata da valori della x che sono compresi tra b e c ($b < x < c$):
- la zona 4 è caratterizzata da valori della x che sono maggiori di c ($x > c$).

Tutti gli elementi della zona 1 e 4 costituiscono gli intervalli illimitati, mentre tutti gli elementi della zona 2 e 3 costituiscono gli intervalli limitati.

I simboli utilizzati per rappresentare gli intervalli sono le parentesi quadre: se una parentesi è rivolta verso l'interno, il numero viene preso in considerazione, altrimenti, se rivolta verso l'esterno, il numero viene escluso.

Avremo dunque i seguenti intervalli (i due punti si leggono tale/i che):

• **Intervalli limitati**

- $]a; b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$ intervallo aperto
- $[a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ intervallo chiuso
- $[a; b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$ intervallo chiuso a sinistra e aperto a destra
- $]a; b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$ intervallo aperto a sinistra e chiuso a destra

• **Intervalli illimitati**

- $[a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x \geq a\}$ intervallo chiuso e illimitato superiormente
- $] -\infty; a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$ intervallo chiuso e illimitato inferiormente
- $] -\infty; a[= \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$ intervallo aperto e illimitato inferiormente
- $]a; +\infty[= \{x \in \mathbb{R} : x > a\}$ intervallo aperto e illimitato superiormente

In particolare: $] -\infty; +\infty[= \mathbb{R}$

2.2. Gli intorni



Diciamo **intorno completo** $I(c)$ di un punto c , un qualsiasi intervallo aperto contenente c .

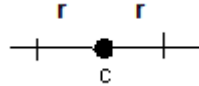


Ad esempio:

$$]-1, 5[\text{ è un intorno di } 0 \Rightarrow I(0)$$



Diciamo **intorno circolare di centro c e raggio r** ($I_r(c)$) un intorno in cui c è il centro dell'intervallo



Esempi:

$$]-1, 1[\text{ è un intorno di centro } 0 \text{ e raggio } 1 \Rightarrow I_1(0)$$

$$]-2, 2[\text{ è un intorno di centro } 0 \text{ e raggio } 2 \Rightarrow I_2(0)$$



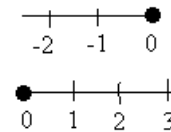
Se consideriamo solo la parte destra di c si parla di **intorno circolare destro** $I_r^+(c)$, se consideriamo solo la parte sinistra di c si parla di **intorno circolare sinistro**. $I_r^-(c)$



Esempi:

$$]-2; 0[\text{ è un intorno sinistro di } 0 \Rightarrow I_2^-(0)$$

$$]0; 3[\text{ è un intorno destro di } 0 \Rightarrow I_3^+(0)$$



3. Le funzioni

3.1. Le funzioni e le loro caratteristiche



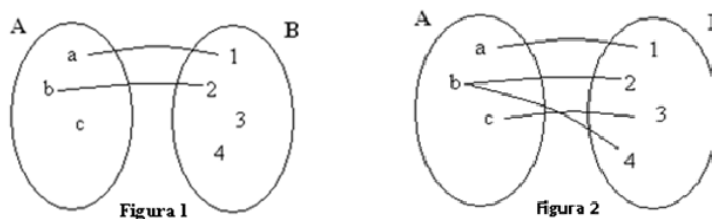
Dati due insiemi A e B, diciamo funzione definita in A ed avente valori in B $f : A \rightarrow B$, ogni legge che associa ad ogni elemento di A uno ed un solo elemento di B.

Uno significa che almeno un elemento di A si deve associare (*ipotesi di esistenza*)

Uno solo significa che il corrispondente in B deve essere unico (*ipotesi di unicità*)

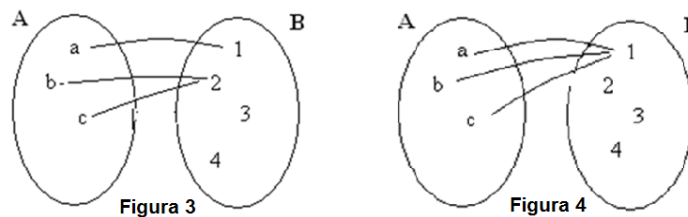
L'insieme A è detto **dominio** o campo di esistenza, l'insieme B è detto **insieme dei valori**.

Ad esempio, facendo una rappresentazione degli insiemi con i diagrammi di Eulero:



Le due corrispondenze non sono funzioni, in quanto, per la figura 1, all'elemento c non corrisponde alcun elemento, mentre per la figura 2, all'elemento b corrispondono due elementi (non è soddisfatta l'unicità).

Sono funzioni (generiche) invece le seguenti corrispondenze:



in quando verificano le ipotesi di esistenza ed unicità.

L'insieme degli elementi di B che sono corrispondenti di elementi di A si chiamano **immagini**.

L'insieme di tutte le immagini è detto **codominio**.

Ad esempio, nella prima funzione della figura 3, sono immagini gli elementi 1, 2 e quindi il condominio è l'insieme {1, 2}, mentre nella seconda funzione è immagine soltanto 1 e pertanto il condominio è l'insieme {1}.

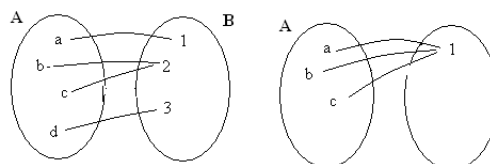
Per indicare che le funzione f associa all'elemento a il valore 1 oppure all'elemento b il valore 2, si scrive:

$$f(a) = 1 \text{ oppure } f(b) = 2$$

Possiamo avere vari tipi di funzioni:

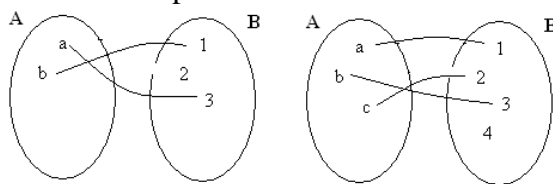


Suriettive se il codominio coincide con B, cioè tutti gli elementi di B sono immagini di elementi di A. In questo caso B non deve avere più elementi di A. Ad esempio:

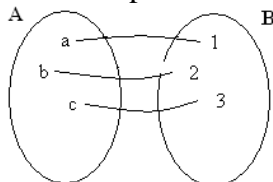




Iniettive se ad elementi distinti di A corrispondono elementi distinti di B. In questo caso A non deve avere più elementi di B. Ad esempio:



Biunivoche se sono sia iniettive che suriettive. Ovviamente il numero di elementi di A deve essere uguale al numero di elementi di B. Ad esempio:



Nella vita quotidiana si incontrano spesso esempi di funzioni: ad esempio quando si associa ad ogni automobile il numero di targa, ad ogni città la propria regione, ad ogni persona la sua età, e così via.

3.2. Le funzioni matematiche



Se ad ogni numero reale associamo un altro numero reale otteniamo una funzione matematica.

Esse si possono suddividere in:

- **Algebriche** se l'espressione di $f(x)$ che la descrive contiene solo operazioni algebriche, ossia l'addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, potenza ed estrazione di radice.
- **Trascendenti**: se non sono algebriche. In queste espressioni sono presenti funzioni esponenziali (in cui la x compare come esponente) funzioni goniometriche (seno, coseno, tangente, cotangente) e funzioni logaritmiche.

Le funzioni algebriche a loro volta si possono suddividere in:

- **interi** se la x la troviamo solo al numeratore. Ad esempio $f(x) = 3x^3 + 2x^2 - x + 4$
- **fratte**, se la x la troviamo al denominatore. Ad esempio $f(x) = \frac{3x-1}{2x^2-5}$
- **razionali**, se la x non si trova sotto radice. Ad esempio $f(x) = 5x^2 - 4$ (razionale intera) oppure $f(x) = \frac{3}{x-1}$ (razionale fratta)
- **irrazionali**, se la x la troviamo sotto radice. Ad esempio $f(x) = \sqrt{5x-3}$ (irrazionale intera) oppure $f(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{3x+6}}$ (irrazionale fratta)

3.3. Dominio di una funzione matematica

Per determinare il dominio di una funzione si tenga presente quanto segue:

✓ Se la funzione è algebrica razionale intera il suo dominio è \mathbb{R}

Ad esempio: $f(x) = x^2 - 3x + 1$ ha per dominio l'insieme \mathbb{R}

✓ Se la funzione è algebrica razionale fratta, il suo dominio si ottiene ponendo diversi da zero tutti i fattori che stanno al denominatore.

Ad esempio: $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{x - 1}$ ha per dominio $\mathbb{R} - \{1\}$

✓ Se la funzione è algebrica irrazionale di indice dispari, il suo dominio coincide con quello del radicando (cioè del termine sotto radice).

Ad esempio $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$ ha per dominio \mathbb{R} , perché \mathbb{R} è il dominio di $x - 1$, mentre $f(x) = \sqrt[3]{\frac{x - 1}{x + 2}}$

ha per dominio $\mathbb{R} - \{-2\}$, perché tale è il dominio del radicando.

✓ Se la funzione è algebrica irrazionale di indice pari, il suo dominio si ottiene ponendo a sistema il dominio del radicando con la disequazione radicando maggiore o uguale a 0

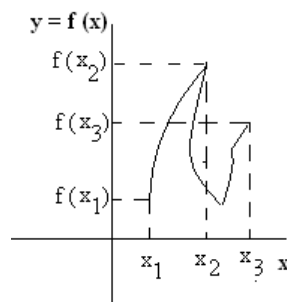
Ad esempio $f(x) = \sqrt[4]{\frac{x - 1}{x + 2}}$ ha per dominio la soluzione del sistema: $\left\{ \begin{array}{l} x \neq -2 \\ \frac{x - 1}{x + 2} \geq 0 \end{array} \right\}$

3.4. Grafico di una funzione



Diciamo **grafico** di una funzione $f(x)$ l'insieme delle coppie ordinate $(x; f(x))$ dove x appartiene al dominio D della funzione. Per coppia ordinata significa che i due elementi x ed $f(x)$ vanno presi in quell'ordine: (prima la x e poi la $f(x)$, senza che vengano scambiati). Pertanto il ruolo della y è svolto dalla $f(x)$. Quindi:

$$G_f = \{ (x, f(x)) \mid x \in D \}$$



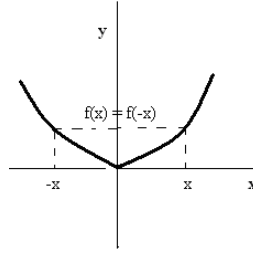
3.5. Funzioni pari e dispari



Una funzione di dominio D si dice **pari** se:

$$f(-x) = f(x) \quad \forall x \in D$$

Se una funzione è pari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse delle y .



Esempio:

$$f(x) = x^2 - 1$$

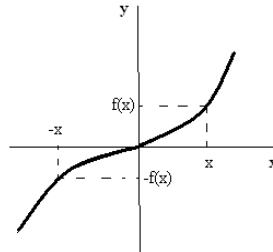
$$f(-x) = (-x)^2 - 1 = x^2 - 1 = f(x)$$



Una funzione di dominio D si dice **dispari** se:

$$f(-x) = -f(x) \quad \forall x \in D$$

Se una funzione è dispari, il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine



Esempio:

$$f(x) = x^3$$

$$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$$

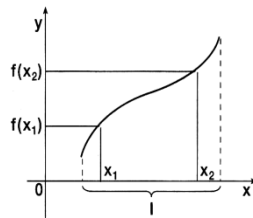
3.6. Funzioni monotone

Sia $f(x)$ una funzione di dominio D e sia I un intervallo contenuto nel dominio.



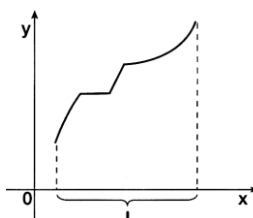
Una funzione f si dice **crescente** in I se presi due elementi $x_1, x_2 \in I$
 se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$

Graficamente avremo:



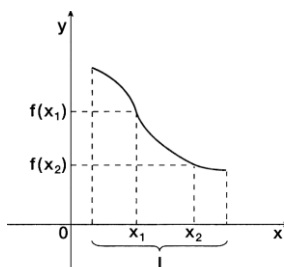
Una funzione f si dice **non decrescente** in I se presi due elementi $x_1, x_2 \in I$
 se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$

Graficamente si ha:



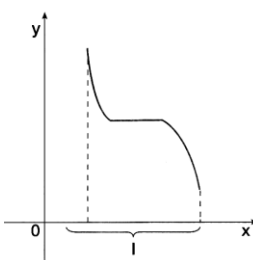
Una funzione f si dice **decrescente** in I se presi due elementi $x_1, x_2 \in I$
 se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$

Graficamente si ha:



Una funzione f si dice **non crescente** in I se presi due elementi $x_1, x_2 \in I$
 se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2) \quad \forall x_1, x_2 \in I$

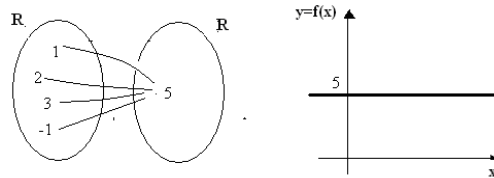
Graficamente si ha:



3.7. Esempi di funzioni.

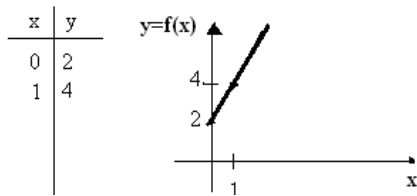
✓ $f(x) = c$ Si tratta di una funzione algebrica razionale intera. Pertanto il suo dominio sarà l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Tale funzione associa ad ogni elemento x sempre lo stesso valore c . Pertanto essa è detta **funzione costante**. Il suo grafico sarà una retta parallela all'asse x . Ad esempio:

$$f(x) = 5$$

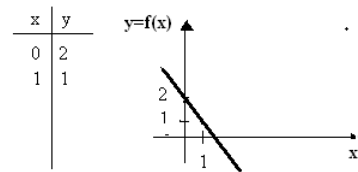


✓ $f(x) = ax + b$. Si tratta di una funzione algebrica razionale intera. Pertanto il suo dominio sarà l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Essendo di primo grado, nel piano cartesiano essa rappresenta una retta non parallela all'asse delle x . Pertanto essa è detta **funzione lineare**. Per rappresentarla basta trovare due punti e disegnare la retta passante per tali punti. Il coefficiente della x è "a". Se $a > 0$ il grafico della retta è crescente, se $a < 0$ il grafico della retta è decrescente. Ad esempio:

$$f(x) = 2x + 2$$



$$f(x) = -x + 2$$



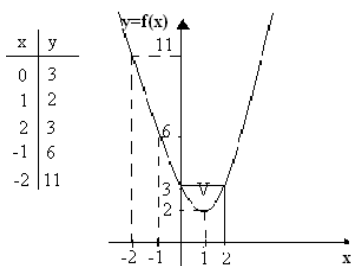
✓ $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si tratta di una funzione algebrica razionale intera. Pertanto il suo dominio sarà l'insieme \mathbb{R} dei numeri reali. Essendo una funzione di secondo grado, nel piano cartesiano essa rappresenta una parabola. Essa è detta **funzione quadratica**. Se $a > 0$ la parabola sarà rivolta verso l'alto, se $a < 0$ verso il basso. Per disegnarla basta determinare il vertice $v\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right)$ e poi bisogna andare alla ricerca di un certo numero di punti. Ad esempio:

$$f(x) = x^2 - 2x + 3$$

$$a = 1, b = -2, c = 3$$

$$\Delta = 4 - 12 = -8 \quad a = 1, b = -2, c = 3$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{-2}{2}; -\frac{-8}{4}\right) = (1; 2)$$

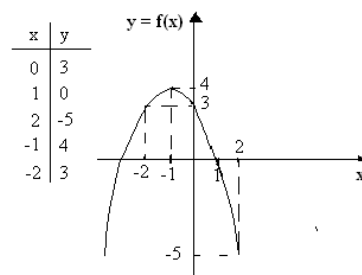


$$f(x) = -x^2 - 2x + 3$$

$$a = -1, b = -2, c = 3$$

$$\Delta = 4 + 12 = 16$$

$$V\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{\Delta}{4a}\right) = \left(-\frac{-2}{-2}; -\frac{16}{-4}\right) = (-1; 4)$$



3.8. Funzioni inverse

Data una funzione $f : A \rightarrow B$, in genere se consideriamo la corrispondenza che ci porta da B in A, essa non è una funzione. Però, se anche da B verso A risulta una funzione, allora diciamo che la funzione è **invertibile** e che $f^{-1} : B \rightarrow A$ è la **funzione inversa** della funzione f.

La condizione che deve essere soddisfatta affinché la funzione f sia invertibile è che fessa deve risultare biunivoca.

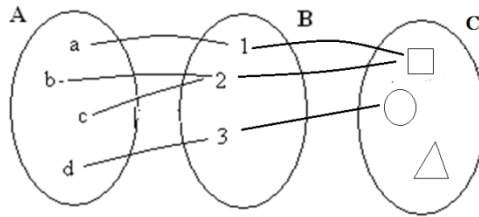
Dal grafico si può verificare facilmente se una funzione è invertibile oppure no: se essa risulta sempre crescente o sempre decrescente, allora essa sarà sicuramente invertibile.

Data una funzione matematica, per verificare se essa è invertibile si deve sostituire y ad f(x) e si ricava la x: se si ottiene un'unica soluzione, la funzione è invertibile. Il valore della x trovato diventa la funzione inversa di f(x).

3.9. Funzioni composte o funzioni di funzioni

Dati tre insiemi A, B, C e siano $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ due funzioni.

Diciamo **funzione composta**, o **funzione di funzione** e si indica con $g \circ f$ (si legge g composto f), quella funzione che si ottiene applicando prima la f e poi la g.



Si faccia attenzione: si applica per prima la funzione che è scritta a destra. Per determinare l'immagine si fa, ad esempio

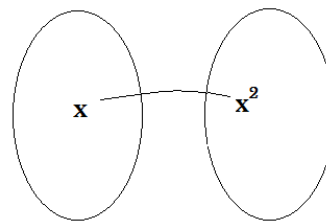
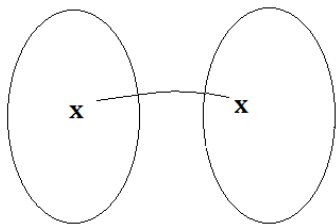
$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) = g(1) = \square$$

$$(g \circ f)(b) = g(f(b)) = g(2) = \circ$$

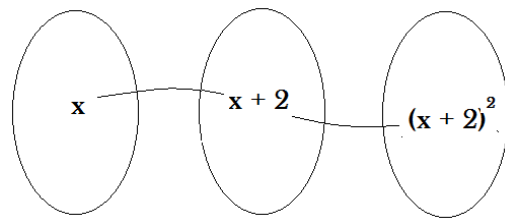
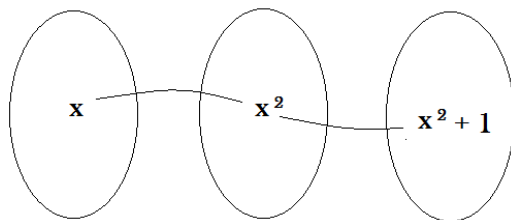
$$(g \circ f)(d) = g(f(d)) = g(3) = \triangle$$

Esempi:

Le funzioni $f(x) = x$, oppure, $f(x) = x^2$ sono funzioni non composte, perché operano tra due soli insiemi: si fissa la x e si trova il risultato.



Le funzioni $f(x) = x^2 + 1$, $f(x) = (x + 2)^2, \dots$ sono, invece, funzioni composte: infatti, in questi casi vengono effettuate più operazioni:



4. Limiti delle funzioni

4.1. Definizione di limite

Vogliamo approfondire lo studio delle funzioni e a tale scopo introduciamo un nuovo concetto, quello di limite che è uno dei più importanti dell'analisi matematica.

Sia $f(x)$ una funzione reale definita in un intervallo I e sia c un punto interno a tale intervallo. Molte volte, qualunque sia la circostanza che si presenta per la funzione $f(x)$ in c , interessa esaminare i valori che $f(x)$ assume, quando alla x si attribuiscono valori di I prossimi al numero c ; in altre parole interessa studiare il comportamento della funzione $f(x)$ in convenienti intorni del punto c , escluso sempre il punto c .

Quindi, **il limite** rappresenta il valore che la funzione assume quando la x si avvicina a c .

Se l'avvicinamento a c può avvenire sia da destra che da sinistra, allora si parla di limite della funzione $f(x)$ per x che tende a c e si scrive $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$;

Se l'avvicinamento a c può avvenire solo da destra allora si parla di limite destro e si scrive $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x)$

Se l'avvicinamento a c può avvenire solo da sinistra allora si parla di limite sinistro e si scrive $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$

La **condizione necessaria e sufficiente** affinché esista il limite è che il limite destro e sinistro siano uguali tra loro, cioè:

$$\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow c^-} f(x)$$

Per calcolare il valore del limite per una funzione, si sostituisce alla x il valore che si trova sotto il simbolo di limite, cioè il valore a cui tende la x .

Esempio:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2 - x - 3}{x - 2} = \frac{2 \cdot 1^2 - 1 - 3}{1 - 2} = \frac{2 - 1 - 3}{-1} = \frac{-2}{-1} = 2$$

Casi particolari:

✓ Nel caso in cui il risultato sia $\frac{1}{\infty}$ si scrive 0. Infatti: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$

Esempio:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{x^2} &= \frac{5}{+\infty} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x} &= \frac{5}{-\infty} = 0 \end{aligned}$$

✓ Nel caso in cui il risultato sia $\frac{1}{0}$ si scrive ∞ ($\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$), ma poiché ad ∞ va sempre attribuito un segno, in questo caso va sempre calcolato il limite destro e quello sinistro ed in base al segno della funzione viene messo + oppure -.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{5}{x} = \frac{5}{0} = \begin{matrix} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \end{matrix} \quad \begin{matrix} - & + \\ \hline 0 \end{matrix}$$

✓ Nel caso in cui il risultato è $\frac{0}{0}$ oppure $\frac{\infty}{\infty}$, siamo di fronte a due **forme indeterminate**, cioè non possiamo dire nulla sul risultato senza fare altre operazioni.

- Per risolvere la forma indeterminata $\frac{\infty}{\infty}$ si mette in evidenza la massima potenza della x sia al numeratore che al denominatore.



Esempi:

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 - x^2 + 3}{x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 \left(1 - \frac{x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{5x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{+\infty \cdot 1}{1} = +\infty$$

$$\checkmark \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - x + 3}{x^2 + 5x - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{x}{x^2} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{5x}{x^2} - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{1} = 1$$

- Per risolvere la forma indeterminata $\frac{0}{0}$ si scompone sia il numeratore che il denominatore e si cerca di semplificare qualche termine del numeratore con qualche termine del denominatore.



Esempi:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 1 + 1 = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)(x + 2)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x - 1}{x + 2} = \frac{2 - 1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$$

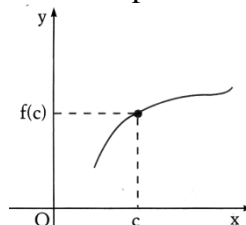
4.2. Funzioni continue e discontinue



Una funzione f definita in un intervallo I si dice **continua** nel punto $c \in I$ se e solo se sono soddisfatte le seguenti due condizioni:

- ✓ $\exists f(c)$
- ✓ $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$

In altre parole, possiamo dire che una funzione è continua nel punto c quando è possibile tracciare il suo grafico senza che vi sia alcuna interruzione nel punto c . Graficamente avremo:

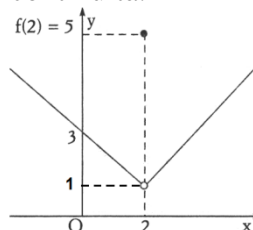


Se una delle due condizioni o entrambe di cui sopra vengono a mancare la funzione si dirà **discontinua** nel punto c .

Esistono tre tipi di discontinuità:



Discontinuità di terza specie, quando $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) \in \mathbb{R}$, ma $\lim_{x \rightarrow c} f(x) \neq f(c)$, cioè pur esistendo il limite, che però deve risultare un numero reale (ossia non può essere infinito), il risultato non è $f(c)$, come richiede la definizione di continuità.

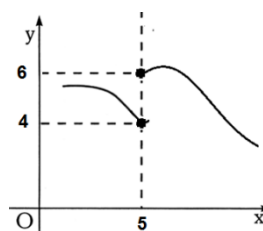


Come si vede dal grafico, la funzione si interrompe prima di arrivare nel punto di ascissa 2, dove $f(2) = 5$ e poi riprende dopo tale punto.

Dal grafico possiamo, quindi, dedurre che $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1 \neq f(2)$. Pertanto la discontinuità è di terza specie. Il limite è uguale a 2 perchè sia da destra che da sinistra tende a 1.



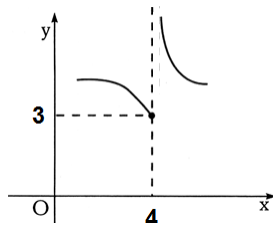
Discontinuità di prima specie, quando $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) \in \mathbb{R} \neq \lim_{x \rightarrow c^-} f(x) \in \mathbb{R}$, cioè quando il limite destro (che deve essere un numero reale) è diverso dal limite sinistro (anch'esso numero reale). Da notare che, poiché il limite destro deve essere diverso da quello sinistro, non esiste il limite della funzione!



Dal grafico possiamo, quindi, dedurre che $\lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = 4 \neq \lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = 6$. Pertanto la discontinuità è di prima specie, essendo il limite destro diverso dal sinistro ma entrambi dei numeri.



Discontinuità di seconda specie, tutte le altre discontinuità



Dal grafico possiamo, quindi, dedurre che $\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = 3$, mentre $\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = +\infty$. Pertanto la discontinuità è di seconda specie, poiché non risulta né di terza specie (essendo il limite destro diverso dal sinistro e quindi non esiste il limite), né di prima specie (essendo il limite destro diverso dal sinistro, ma non entrambi numeri reali)

N.B. I punti di discontinuità sono tutti quei punti che vengono esclusi dal calcolo del dominio.

$$f(x) = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2}$$

Per determinare i punti di discontinuità della funzione, si calcola prima il dominio, il quale risulta:

$$D = \mathbb{R} - \{1, 2\}$$

Pertanto gli unici punti di discontinuità sono 1 e 2.

Calcolando i limiti avremo:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{1 - 1 - 2}{1 - 3 + 2} = \frac{-2}{0}$$

Poiché, indipendentemente dal segno, il risultato è ∞ , tale discontinuità non è né di prima, né di terza specie (infatti il risultato deve essere un numero reale!), quindi risulta di seconda specie.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \frac{4 - 2 - 2}{4 - 6 + 2} = \frac{0}{0}$$

Essendo una forma indeterminata, procediamo per scomposizione, ottenendo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+1)}{(x-2)(x-1)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x+1}{x-1} = \frac{2+1}{2-1} = \frac{3}{1} = 3$$

Dunque il punto di discontinuità 2 è di terza specie, in quanto, pur non essendo possibile calcolare $f(2)$, esiste il limite della funzione, per $x \rightarrow 2$, e risulta un numero reale.

4.3. Asintoti

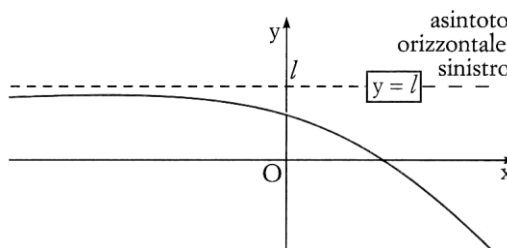
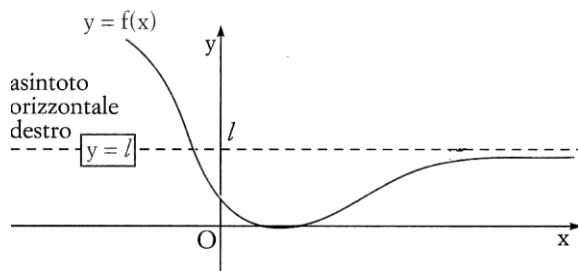


Diciamo **asintoto** quella retta a cui si avvicina il grafico di una funzione senza, però, mai toccarla. Si suole dire che grafico e retta si incontrano all'infinito. Vi sono tre tipi di asintoti:



Asintoto orizzontale, se $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$ cioè il limite della funzione deve risultare un numero reale. In questo caso l'equazione dell'asintoto è $y = l$.

Nel caso in cui x si fa tendere a $+\infty$, l'asintoto è detto **orizzontale destro**, mentre se x si fa tendere a $-\infty$, l'asintoto è detto **orizzontale sinistro**.



Esempio.

Determiniamo gli asintoti orizzontali della funzione $f(x) = \frac{x^2 - 3x + 1}{3x^2 - x + 1}$

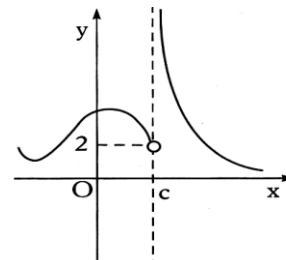
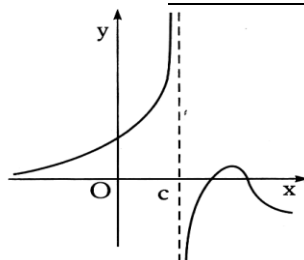
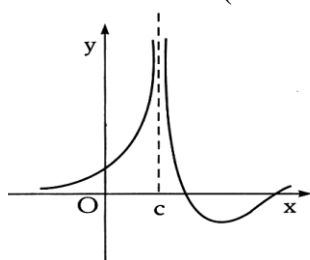
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 1}{3x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{3}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{3} \Rightarrow \boxed{y = \frac{1}{3}} \text{ è l'equazione dell'asintoto orizzontale destro.}$$

Poiché lo stesso risultato si ha facendo tendere $x \rightarrow -\infty$, allora diciamo che $y = \frac{1}{3}$ è l'equazione dell'asintoto orizzontale sia destro che sinistro.



Asintoto verticale, se $\exists \lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$, cioè il limite della funzione, per $x \rightarrow c$, deve essere uguale ad ∞ . In questo caso l'equazione dell'asintoto verticale è $x = c$.

Nel caso in cui x si fa tendere a c da destra ($x \rightarrow c^+$), l'asintoto è detto **verticale destro**, mentre se x si fa tendere a c da sinistra ($x \rightarrow c^-$), l'asintoto è detto **verticale sinistro**.



Nella prima figura si ha $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$, mentre nella seconda si ha $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = +\infty$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = -\infty$. In ogni caso $x = c$ è **asintoto verticale sia destro che sinistro**.

Nella terza figura, invece, $\lim_{x \rightarrow c^-} f(x) = 2$ e $\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = +\infty$. In questo caso $x = c$ è **solo asintoto verticale destro**.

N.B. Il punto c è uno dei punti di discontinuità della funzione $f(x)$.



Esempio:

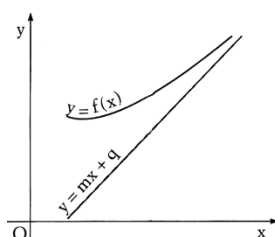
Determiniamo gli asintoti verticali della funzione $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Poiché $D = \mathbb{R} - \{1\}$, va calcolato il limite per x che tende ad 1 della funzione

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x-1} = \frac{1+1}{1-1} = \frac{2}{0} = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = 1} \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$$

destro che sinistro



Asintoto obliquo: se $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$, $\exists \lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - mx] = n \in \mathbb{R}$ cioè se i due precedenti limiti esistono e sono valori numerici. L'equazione dell'asintoto obliquo è $\boxed{y = mx + n}$. Nel caso in cui x si fa tendere a $+\infty$, l'asintoto è detto obliquo destro, mentre se x si fa tendere a $-\infty$, l'asintoto è detto obliquo sinistro



Esempio:

Determiniamo gli asintoti obliqui della funzione $f(x) = \frac{2x^2+x-3}{x+1}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{2x^2+x-3}{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2+x-3}{x+1} \cdot \frac{1}{x} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x-3}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x-3}{x^2+x} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(2 + \frac{1}{x} - \frac{3}{x^2} \right)}{x^2 \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - mx = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^2+x-3}{x+1} - 2x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{2x^2+x-3-2x^2-2x}{x+1} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x-3}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(-1 - \frac{3}{x} \right)}{x \left(1 + \frac{1}{x} \right)} = -1$$

Poiché i risultati dei due limiti precedenti (il primo risultato, cioè 2, rappresenta il valore di m , il secondo, cioè -1 , il valore di n) sono entrambi valori numerici, allora possiamo confermare l'esistenza dell'asintoto obliquo la cui equazione è $y = mx + n$ cioè $\boxed{y = 2x - 1}$

N.B. La ricerca degli asintoti obliqui va fatta solo nel caso in cui non esistono gli asintoti orizzontali, cioè nel caso in cui:

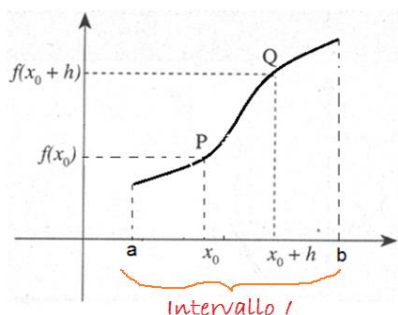
$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

poiché, in caso contrario, il valore di m che si otterrà sarà 0 e, quindi, essendo m il coefficiente angolare della retta, essa risulterà orizzontale.

5. Derivata di una funzione

5.1. Definizione di derivata

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e indichiamo con x_0 un punto interno a questo intervallo. Se da x_0 si passa ad un altro punto qualunque x_0+h , dell'intervallo I , si dice che si è dato alla variabile x l'**incremento** (positivo o negativo) h .



La differenza $f(x_0+h) - f(x_0)$, tra i valori che la funzione assume quando la variabile x passa dal valore x_0 al valore x_0+h , si chiama **incremento della funzione** e può avere valore positivo, negativo o nullo.

Il rapporto:

$$\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h},$$

si chiama **rapporto incrementale** della funzione $f(x)$ relativo al punto x_0 e all'incremento h . Questo rapporto una volta fissato x_0 , varia al variare di h , cioè esso dipende dal valore di h che deve essere diverso da zero ed inoltre x_0+h deve trovarsi all'interno dell'intervallo I , in cui è definita la $f(x)$.

Si dà a questo punto la seguente definizione:



Si chiama **derivata** della funzione $f(x)$ nel punto x_0 il limite, se esiste ed è finito (cioè un valore numerico), del rapporto incrementale al tendere a zero dell'incremento h .

La derivata si indica generalmente con le seguenti notazioni $f'(x_0)$ oppure $[Df(x)]_{x_0}$ ed è quindi definita dalla relazione:



$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}.$$

Esempio:

Calcoliamo nel punto $x_0 = 3$ la derivata della funzione $f(x) = x^2 - x$.

Si procede prima al calcolo del **rapporto incrementale**:

$$\begin{aligned} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} &= \frac{f(3+h) - f(3)}{h} = \frac{[(3+h)^2 - (3+h)] - [(3)^2 - (3)]}{h} = \\ &= \frac{9 + 6h + h^2 - 3 - h - 9 + 3}{h} = \frac{h^2 + 5h}{h} = \frac{h(h+5)}{h} = h + 5. \end{aligned}$$

Si calcola successivamente il limite del **rapporto incrementale** per $h \rightarrow 0$:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (h + 5) = 5.$$

Si conclude affermando che la funzione è derivabile per $x=3$ e la derivata in tale punto vale 5.

5.2. Derivate di alcune funzioni elementari

Tenendo conto di quanto affermato alla fine del precedente paragrafo, proviamo a calcolare la derivata di alcune funzioni elementari.

✓ La derivata di una costante, $f(x) = k$, vale 0 , cioè:

$$\boxed{Dk = 0}$$

Infatti è:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{k - k}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 0 = 0.$$

✓ La derivata della funzione $f(x) = x$ vale 1 , cioè:

$$\boxed{Dx = 1}$$

Infatti:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0 + h - x_0}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 1 = 1.$$

✓ La derivata della funzione $f(x) = x^2$ vale $2x$, cioè:

$$\boxed{Dx^2 = 2x}$$

Infatti:

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{x_0^2 + 2hx_0 + h^2 - x_0^2}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h(2x_0 + h)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2x_0 + h = 2x_0. \end{aligned}$$

✓ Generalizzando, la derivata della funzione $f(x) = x^n$ vale nx^{n-1} , cioè:

$$\boxed{Dx^n = nx^{n-1}}$$

Ad esempio: $Dx^3 = 3x^2$, $Dx^4 = 4x^3$, $Dx^5 = 5x^4$

Per semplificare il calcolo della derivata di una funzione, è stata predisposta una tabella di facile consultazione. Si riporta a sinistra la funzione $f(x)$ e, a destra, la derivata $y' = f'(x)$ in un generico punto, dove la funzione è derivabile:

Tabella derivate più usate

Funzione	Derivata
$f(x) = k$	$f'(x) = 0$
$f(x) = x$	$f'(x) = 1$
$f(x) = x^n$	$f'(x) = n x^{n-1}$

5.3. Teoremi sulle derivate

✓ Per la derivata di una **funzione somma** di più funzioni derivabili vale il seguente teorema:

La derivata della somma di due (o più) funzioni derivabili, è uguale alla somma delle derivate delle singole funzioni, cioè

$$D[f(x) + g(x)] = Df(x) + Dg(x)$$

✓ Per la derivata di una **costante** per una **funzione** vale il seguente teorema:

La derivata del prodotto di una costante k per una funzione $f(x)$ è uguale alla costante per la derivata della funzione (in sostanza qualunque costante moltiplicativa può essere portata fuori dal simbolo di derivata), cioè:

$$D k \cdot f(x) = k \cdot Df(x)$$

✓ Per la derivata di una **funzione prodotto** di due funzioni derivabili vale, invece, il seguente teorema:

La derivata del prodotto di due funzioni derivabili, è uguale alla derivata del primo fattore per il secondo non derivato, **più**, il primo fattore non derivato per la derivata del secondo, cioè:

$$D[f(x) \cdot g(x)] = Df(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot Dg(x)$$

✓ Per la derivata di una **funzione quoziente** di due funzioni derivabili vale, il seguente teorema:

La derivata del quoziente di due funzioni derivabili, è uguale a una frazione avente, al numeratore la derivata del primo fattore per il secondo non derivato, **meno**, il primo fattore non derivato per la derivata del secondo, mentre al denominatore il quadrato del denominatore, cioè:

$$D \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{Df(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot Dg(x)}{[g(x)]^2}$$

✓ Per la derivata di una **funzione inversa** di una funzione derivabili vale, il seguente teorema:

La derivata di una funzione inversa è uguale all'inverso della derivata della funzione data, cioè:

$$D f^{-1}(y) = \frac{1}{D f(x)}$$



✓ Per la derivata di una **funzione di funzione** vale, il seguente teorema:

La derivata di una funzione di funzione è uguale al prodotto delle derivate di tutte le funzioni di cui è composta, tenendo presente che la funzione che si applica per ultima va derivata per prima, cioè:

$$D(g \circ f)(x) = D[g(f(x))] \cdot Df(x)$$



Esempi:

✓ $D(x^3 + x^2) = 3x^2 + 2x$

✓ $D(x^3 + x + 7) = 3x^2 + 1 + 0 = 3x^2 + 1$

✓ $D(4x + 3x^2 + 5x^3) = 4 \cdot Dx + 3 \cdot Dx^2 + 5 \cdot Dx^3 = 4 \cdot 1 + 3 \cdot 2x + 5 \cdot 3x^2 = 4 + 6x + 15x^2$

✓ $D[2x^4(x^2 + 3x + 1)] = D(2x^4) \cdot (x^2 + 3x + 1) + D(x^2 + 3x + 1) \cdot 2x^4 =$
 $= 8x^3(x^2 + 3x + 1) + (2x + 3 + 0) \cdot 2x^4 = 8x^5 + 24x^4 + 8x^3 + 2x + 3$

$$✓ \quad D \frac{x^3}{x+1} = \frac{3x^2(x+1) - 1(x^3)}{(x+1)^2} = \frac{3x^3 + 3x^2 - x^3}{(x+1)^2} = \frac{2x^3 + 3x^2}{(x+1)^2}$$

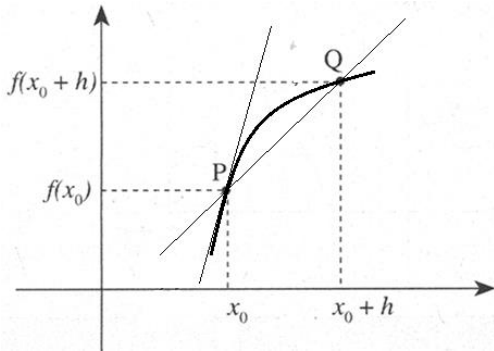
$$✓ \quad D \sqrt{y} = \frac{1}{Dx^2} = \frac{1}{2x} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

$$✓ \quad D(2x - 5)^2 = 2(2x - 5) \cdot (2 - 0) = 4(2x - 5)$$

$$✓ \quad D(2x^2 - 5)^2 = 2(2x^2 - 5) \cdot (4x - 0) = 8x(2x^2 - 5)$$

5.4. Equazione della tangente a una curva in un punto

Consideriamo una curva generica $f(x)$ e siano $P(x_0; f(x_0))$, $Q(x_0+h; f(x_0+h))$ due dei suoi punti. Dalla geometria analitica si sa che il coefficiente angolare della retta passante per i punti $A(x_A; y_A)$ e $B(x_B; y_B)$ è:



$$m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Nel nostro caso, essendo P e Q i due punti, sostituendo le loro coordinate, avremo:

$$m = \frac{y_Q - y_P}{x_Q - x_P} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{x_0+h - x_0} = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

ossia, tenendo presente l'equazione di una retta passante per il punto $P_0(x_0; y_0)$ è

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

avremo:

$$\Rightarrow \quad y - f(x_0) = \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} (x - x_0) \quad (4.4.1)$$

che rappresenta l'equazione della retta PQ, ossia della retta secante al grafico della funzione $f(x)$.

Confrontando tale equazione con l'equazione della retta passante per un punto: $y - y_0 = m(x - x_0)$, in cui m rappresenta il coefficiente angolare, si può dedurre che la frazione che compare nell'equazione (4.4.1), cioè $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ rappresenta il coefficiente angolare della retta PQ.

Pertanto, osservando che la suddetta frazione non è altro che il rapporto incrementale della funzione $f(x)$, possiamo subito affermare che:

*il rapporto incrementale della funzione $f(x)$ rappresenta geometricamente il coefficiente angolare della retta PQ, cioè della **retta secante** al grafico della funzione*

Facendo avvicinare il punto Q al punto P, cioè facendo tendere $h \rightarrow 0$, notiamo, graficamente, che la retta da secante tende a diventare tangente in P. D'altra parte se $h \rightarrow 0$, il rapporto incrementale, per definizione, tende alla derivata. Dunque l'equazione (4.4.1) tende a diventare:

$$y - f(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} (x - x_0)$$

$$\Rightarrow \quad y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \quad (4.4.2)$$

Quindi mentre la retta secante tende a diventare tangente, il rapporto incrementale tende a diventare derivata. Pertanto, possiamo affermare che:

la derivata rappresenta, geometricamente, il coefficiente angolare della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto $P(x_0; f(x_0))$, e quindi l'equazione (4.4.2) rappresenta quella della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$ nel punto $P(x_0; f(x_0))$.

5.5. Esempi:

✓ Sia $f(x) = x^2 - 6x + 6$ e sia P uno dei suoi punti di ascissa 2 ($\underline{x_0 = 2}$). Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$, calcoliamo prima la derivata della funzione nel punto 2 (ricordiamo che $P(x_0; f(x_0))$) e quindi nel nostro caso $x_0 = 2$ mentre $f(x_0) = f(2) = -2$):

$$f'(x) = 2x - 6 \Rightarrow f'(2) = 2 \cdot 2 - 6 = 4 - 6 = -2.$$

Applicando l'equazione (4.4.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - f(2) = f'(2) \cdot (x - 2) \Rightarrow y - (-2) = -2 \cdot (x - 2) \\ &\Rightarrow y + 2 = -2x + 4 \Rightarrow y = -2x + 2 \end{aligned}$$

✓ Sia $f(x) = 3x^2 - x$ e sia P uno dei suoi punti di ascissa 0 ($\underline{x_0 = 0}$). Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$, calcoliamo prima la derivata della funzione nel punto 0 (ricordare che $P(x_0; f(x_0))$) e quindi nel nostro caso $x_0 = 0$, mentre $f(x_0) = f(0) = 0$):

$$f'(x) = 6x - 1 \Rightarrow f'(0) = 6 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1.$$

Applicando l'equazione (4.4.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 0 = -1 \cdot (x) \\ &\Rightarrow y = -x \end{aligned}$$

✓ Sia $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+3}$ e sia P uno dei suoi punti di ascissa 0 ($\underline{x_0 = 0}$). Per determinare l'equazione della retta tangente al grafico della funzione $f(x)$, calcoliamo prima la derivata della funzione nel punto 0 (ricordare che $P(x_0; f(x_0))$) e quindi nel nostro caso $x_0 = 0$, mentre $f(x_0) = f(0) = \frac{0+1}{2 \cdot 0+3} = \frac{1}{3}$):

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2x(2x+3) - 2(x^2+1) = 4x^2 + 6x - 2x^2 - 2 = 2x^2 + 6x - 2 \Rightarrow \\ &\Rightarrow f'(0) = 2 \cdot 0 + 6 \cdot 0 - 2 = 0 - 0 - 2 = -2. \end{aligned}$$

Applicando l'equazione (4.4.2) si ottiene:

$$\begin{aligned} y - f(x_0) &= f'(x_0) \cdot (x - x_0) \Rightarrow y - f(0) = f'(0) \cdot (x - 0) \Rightarrow y - \frac{1}{3} = -2 \cdot x \\ &\Rightarrow y = -2x + \frac{1}{3} \end{aligned}$$

5.6. Derivate di ordine superiore al primo

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo I. Abbiamo già visto che $f'(x)$ è la funzione derivata di $f(x)$. Se andiamo a derivare la funzione $f'(x)$, ammesso che essa sia ulteriormente derivabile, otteniamo la **derivata seconda**, indicata con $f''(x)$. Se, ancora, andiamo a derivare la funzione $f''(x)$, ammesso che essa sia ulteriormente derivabile, otteniamo la **derivata terza**, indicata con $f'''(x)$, e così via.....

Se è necessario, per evitare ambiguità, la funzione $f'(x)$ viene chiamata *derivata prima*.



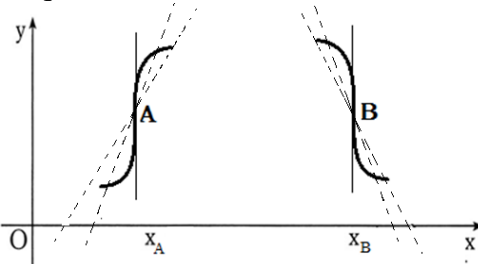
Osservazioni

- ✓ Il coefficiente angolare m fornisce informazioni sull'angolo che la retta forma con l'asse x : se $m > 0$ la retta forma un angolo acuto, se $m < 0$ la retta forma un angolo ottuso, se $m = 0$ la retta è parallela all'asse x , se m non è un valore numerico, cioè $m = \infty$, la retta è parallela all'asse y .
- ✓ Si può verificare che la funzione $f(x)$ non sia derivabile nel punto x_0 . Però interpretando il limite del rapporto incrementale come il coefficiente angolare della retta secante, si possono verificare i seguenti casi in cui la funzione non è derivabile:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \infty,$$

cioè, il limite del rapporto incrementale in x_0 è ∞ (indipendentemente dal segno $+ o -$)

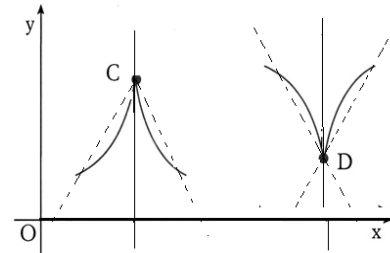
In questo caso la retta secante mantiene il coefficiente angolare o sempre positivo (come nel caso del punto A: infatti l'angolo della secante è sempre acuto), o sempre negativo (come nel caso del punto B: infatti l'angolo della secante è sempre ottuso) e quando $h \rightarrow 0$, il fatto che il limite risulta ∞ , significa che la retta secante, nel diventare tangente, tende a disporsi parallelamente all'asse y (il coefficiente angolare vale $+\infty$, nel caso di A, $-\infty$ nel caso di B). Diciamo che tali punti sono dei **flessi a tangente verticale**.



$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= +\infty (-\infty) \\ \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} &= -\infty (+\infty) \end{aligned}$$

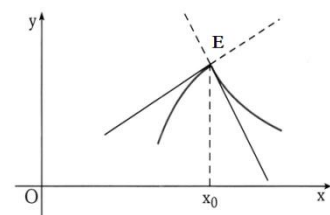
cioè il limite destro e quello sinistro sono diversi tra loro (e quindi non esiste il limite), ma entrambi infiniti

In questo caso il coefficiente angolare della secante cambia segno passando da sinistra a destra del punto (nel caso del punto C infatti l'angolo della secante è acuto a sinistra di C, ottuso a destra di C, mentre nel caso del punto D è ottuso a sinistra di D, acuto a destra di D) e quando $h \rightarrow 0$, il fatto che il limite risulta ∞ , significa che la retta secante, nel diventare tangente, anche in questo caso tende a disporsi parallelamente all'asse y (in questo caso il coefficiente angolare tende a $+\infty$ a sinistra di C, a $-\infty$ a destra di C, mentre tende a $-\infty$ a sinistra di D, a $+\infty$ a destra di D.) Tali punti sono detti **cuspidi**.



$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R} \neq \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \in \mathbb{R}$$

cioè limite destro e quello sinistro sono entrambi numeri reali, ma risultano diversi tra loro.



In questo caso nel punto E vi sono due rette tangenti diverse, perché abbiamo due limiti diversi.

Tale punto è detto **punto angoloso**.

6. Teoremi sulle funzioni derivabili.

6.1. Funzioni derivabili crescenti e decrescenti

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I (limitato o illimitato). Ricordando le definizioni di funzione crescente e decrescente date precedentemente (vedi cap. 2), nel caso di funzioni derivabili si ha il seguente fondamentale teorema, utile per la determinazione degli intervalli di monotonìa di una funzione, cioè degli intervalli in cui essa è crescente o decrescente, e il teorema inverso.

Teorema

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo I .

- Se $f'(x) > 0$ in tutti i punti di I ($\forall x \in I$) $\Rightarrow f(x)$ è crescente in I
- Se $f'(x) < 0$ in tutti i punti di I ($\forall x \in I$) $\Rightarrow f(x)$ è decrescente in I

Teorema inverso

Sia $f(x)$ una funzione derivabile in un intervallo I .

- Se $f(x)$ è crescente in I $\Rightarrow f'(x) \geq 0$ in tutti i punti di I ($\forall x \in I$)
- Se $f(x)$ è decrescente in I $\Rightarrow f'(x) \leq 0$ in tutti i punti di I ($\forall x \in I$)



Esempi:

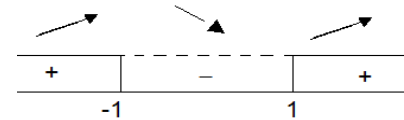
✓ Sia $f(x) = x^3 - 3x$. Per determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, risolviamo la disequazione $f'(x) > 0$. Si ha:

$$f'(x) = 3x^2 - 3 \Rightarrow 3x^2 - 3 > 0 \Rightarrow x^2 > 1 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1.$$

Dal grafico si nota che:

in $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, essendo la $f'(x) > 0$, la funzione è crescente,

mentre in $]-1; 1[$, essendo la $f'(x) < 0$, la funzione è decrescente come mostrano le frecce disegnate sul grafico.



✓ Sia $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Per determinare gli intervalli in cui la funzione è crescente, risolviamo la disequazione $f'(x) > 0$. Si ha:

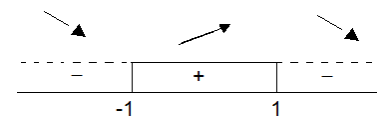
$$f'(x) = \frac{1(1+x^2) - 2x \cdot x}{(1+x^2)^2} = \frac{1+x^2-2x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \Rightarrow \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} > 0$$

Poiché il denominatore, essendo un quadrato, è sicuramente positivo, ai fini dello studio del segno non influenza il risultato finale. Pertanto si può trascurare

$$\Rightarrow 1 - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 < 1 \Rightarrow -1 < x < 1.$$

Dal grafico si nota che:

in $]-1; 1[$, essendo la $f'(x) > 0$, la funzione è crescente, mentre in $]-\infty; -1[\cup]1; +\infty[$, essendo la $f'(x) < 0$, la funzione è decrescente, come mostrano le frecce disegnate sul grafico



6.2. Massimi, minimi e flessi. Massimi e minimi relativi

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo I e sia $c \in I$.



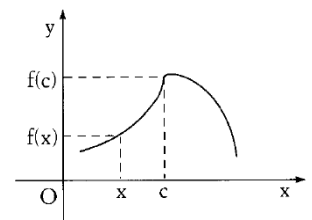
Diciamo che c è un **punto di massimo** per la funzione $f(x)$ e, quindi, che $f(c)$ è il **massimo relativo** della funzione, se

$$\exists I_r(c) : \forall x \in I_r(c) \Rightarrow f(x) \leq f(c)$$

ossia, se esiste un intorno di c , contenuto in I per tutti i punti del quale si abbia $f(x) \leq f(c)$.

Pertanto $f(c)$ è il massimo dei valori che la funzione assume nell'intorno considerato.

Si dice, quindi, che.



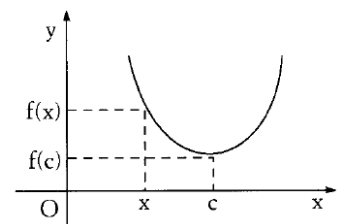
Diciamo che c è un **punto di minimo** per la funzione $f(x)$ e, quindi, che $f(c)$ è il **minimo relativo** della funzione, se

$$\exists I_r(c) : \forall x \in I_r(c) \Rightarrow f(x) \geq f(c)$$

ossia, se esiste un intorno di c , contenuto in I per tutti i punti del quale si abbia $f(x) \geq f(c)$

Pertanto $f(c)$ è il minimo dei valori che la funzione assume nell'intorno considerato.

Se c è un punto di massimo o di minimo relativo, si dice anche che c è un **punto estremante** per la funzione ed il corrispondente valore $f(c)$ è detto invece **estremo relativo**.



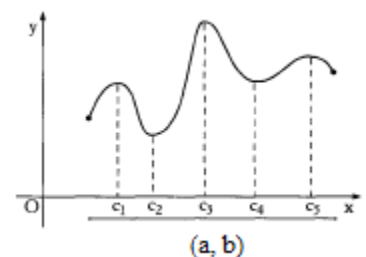
Osservazioni

L'aggettivo *relativo* è dovuto al fatto che $f(c)$ è il massimo o il minimo dei valori che la funzione assume relativamente ad un intorno di c e non a tutto l'intervallo I . Per tale motivo i massimi e i minimi relativi sono detti anche *massimi e minimi locali*. La funzione $f(x)$ può avere uno o più punti di minimo o di massimo relativo in I .

Se si fa riferimento al grafico della funzione, per punto di massimo o di minimo relativo si dovrà intendere il punto di coordinate $(c; f(c))$.

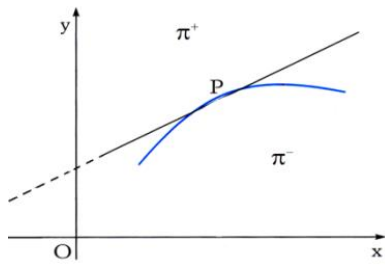
I punti di massimo o minimo relativo non vanno confusi con i punti di massimo o minimo assoluti (estremi assoluti), cioè calcolati in tutto l'intervallo I . Naturalmente un punto di massimo o di minimo assoluto è anche un punto di massimo o minimo relativo, mentre il viceversa non può essere vero.

Nella figura si può osservare che, internamente all'intervallo I , i punti c_1 , c_3 , c_5 sono punti di massimo relativo, ma solo c_3 è un punto di massimo assoluto, mentre i punti c_2 , c_4 sono di minimo relativo, ma solo c_2 è di minimo assoluto.



6.3. Concavità e flessi

Si $f(x)$ una funzione derivabile all'interno di un intervallo I e sia c un punto interno ad I . Consideriamo



la retta tangente al grafico della funzione nel punto $P(c; f(c))$. Essa divide il piano in due semipiani:

- ✓ Il semipiano superiore (indicato con π^+), cioè quella parte di piano costituita dai punti che si trovano al di sopra di tale tangente;
- ✓ Il semipiano inferiore (indicata con π^-), cioè quella parte di piano costituita dai punti che si trovano al di sotto di tale tangente;

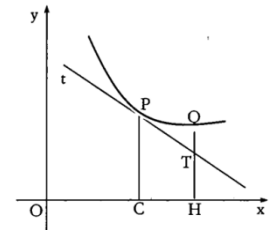
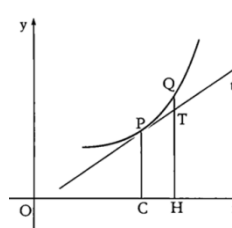


Diciamo che il grafico di $f(x)$ volge nel punto $P(c; f(c))$ la **concavità verso l'alto** se:

$$\exists I_r(c) : \forall x \in I_r(c) \ x \neq c \Rightarrow P(x; f(x)) \in \pi^+$$

ossia, esiste un intorno di c per cui, i punti del grafico che hanno la x in tale intorno, si trovano tutti nel semipiano superiore.

Da notare che, ogni punto Q della curva ha ordinata maggiore del rispettivo punto T della tangente avente la stessa ascissa di Q .

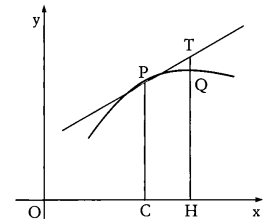
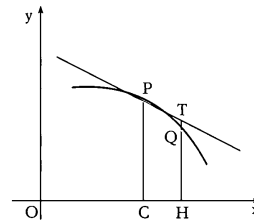


Diciamo che il grafico di $f(x)$ volge nel punto $P(c; f(c))$ la **concavità verso il basso** se:

$$\exists I_r(c) : \forall x \in I_r(c) \ x \neq c \Rightarrow P(x; f(x)) \in \pi^-$$

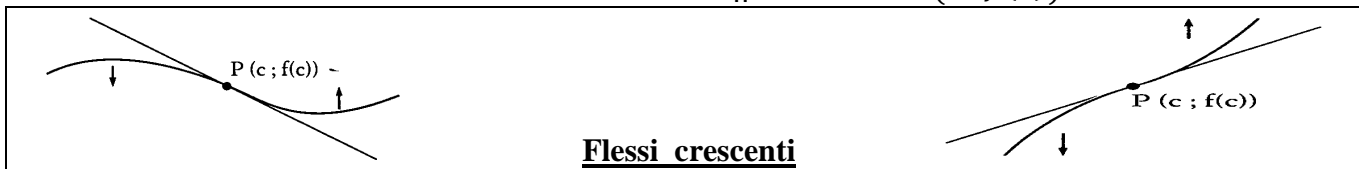
ossia, esiste un intorno di c per cui, i punti del grafico che hanno la x in tale intorno, si trovano tutti nel semipiano inferiore.

Da notare che, ogni punto Q della curva ha ordinata maggiore del rispettivo punto T della tangente avente la stessa ascissa di Q .



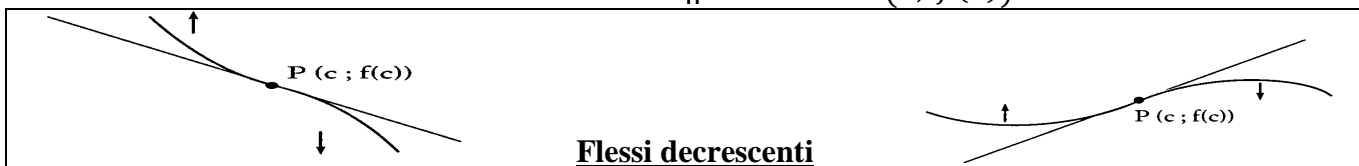
Diciamo che il grafico della funzione $f(x)$ ha nel punto $P(c; f(c))$ un **flesso** se:

$$\exists I_r(c) : \forall x \in I_r(c) \ \begin{cases} x < c \Rightarrow P(x; f(x)) \in \pi^- \\ x > c \Rightarrow P(x; f(x)) \in \pi^+ \end{cases} \quad (\text{def. 6.2.1})$$



Oppure

$$\exists I_r(c) : \forall x \in I_r(c) \ \begin{cases} x < c \Rightarrow P(x; f(x)) \in \pi^+ \\ x > c \Rightarrow P(x; f(x)) \in \pi^- \end{cases} \quad (\text{def. 6.2.2})$$



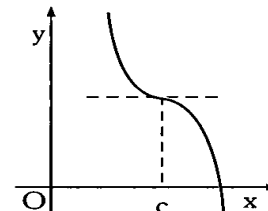
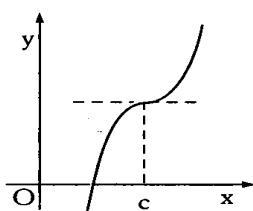
ossia, esiste un intorno di c per cui, alla sua sinistra la concavità è rivolta verso il basso, mentre alla sua destra è rivolta verso l'alto, oppure in maniera equivalente, alla sua sinistra la concavità è rivolta verso l'alto, mentre alla sua destra è rivolta verso il basso. Quindi, in altre parole i punti flesso sono quei punti per cui passando da sinistra a destra dell'intorno di c , la concavità subisce una variazione.

I flessi, a loro volta si possono suddividere in:

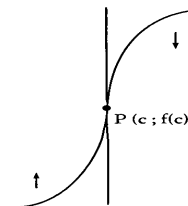
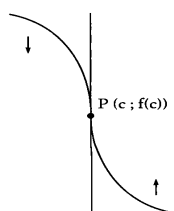
- **Flessi crescenti**, se il grafico, nel punto di flesso, passa dal di sotto al di sopra della retta tangente in P , ossia a sinistra di P la concavità è verso il basso, mentre a destra diventa verso l'alto (def. 6.2.1)
- **Flessi decrescenti** se il grafico, nel punto di flesso, passa dal di sopra al di sotto della retta tangente in P , ossia a sinistra di P la concavità è verso l'alto, mentre a destra diventa verso il basso (def. 6.2.2)

Inoltre, in base all'inclinazione della retta tangente nel punto di flesso P , possiamo avere:

- **Flessi a tangente orizzontale**, se la retta tangente è parallela all'asse delle x



- **Flessi a tangente verticale**, se la retta tangente è parallela all'asse delle y



- **Flessi a tangente obliqua**, se la retta tangente non è parallela a nessuno dei due assi cartesiani.

6.4. Ricerca dei massimi e minimi relativi

Consideriamo ora il caso di una funzione $f(x)$ derivabile in un intervallo I e andiamo a vedere alcune regole per determinare gli estremi relativi.

Teorema

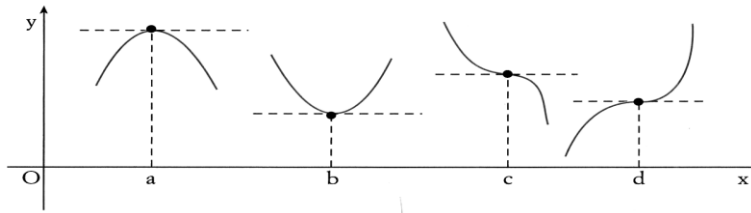
Sia $f(x)$ una funzione derivabile all'interno dell'intervallo I .

Se c , interno ad I , è un punto estremante $\Rightarrow f'(c) = 0$.



Osservazione

Il teorema afferma che l'annullarsi della derivata è solo una condizione necessaria per l'esistenza di un estremo relativo (massimo o minimo), ma non condizione sufficiente, cioè da sola non basta a dire che nel punto c vi sia un massimo o un minimo relativo. Tutti i punti che verificano la condizione $f'(c) = 0$ sono detti **punti stazionari** o **critici**. Di essi si può dire soltanto che sono punti a tangente orizzontale: infatti ricordando che la derivata rappresenta il coefficiente angolare della retta tangente, essendo tale coefficiente uguale a zero, la retta è parallela all'asse x e quindi è orizzontale.



Come si vede dai grafici posti sopra, tali punti possono essere punti di massimo (punto di ascissa a), punti di minimo (punto di ascissa b) oppure punti di flesso (i punti di ascissa c , d). Ciò di cui abbiamo assoluta certezza, come abbiamo detto prima, è che i punti stazionari sono sicuramente punti a tangente orizzontale.

Il precedente teorema, però, può essere invertito in questo modo:

Teorema inverso

Sia $f(x)$ una funzione continua in un intervallo I , derivabile all'interno di I , c interno ad I ed $f'(c) = 0$.

✓ Se $f'(x) > 0 \quad \forall x < c$ e $f'(x) < 0 \quad \forall x > c \Rightarrow c$ è un punto di **massimo relativo**

cioè se a sinistra di c la funzione è crescente e poi a destra diventa decrescente (si veda il punto di ascissa a nel grafico precedente). Pertanto il punto c è un punto di massimo

✓ Se $f'(x) < 0 \quad \forall x < c$ e $f'(x) > 0 \quad \forall x > c \Rightarrow c$ è un punto di **minimo relativo**

cioè se a sinistra di c la funzione è decrescente e poi a destra diventa crescente (si veda il punto di ascissa b nel grafico precedente). Pertanto il punto c è un punto di minimo

✓ Se $f'(x) < 0 \quad \forall x \neq c$ oppure $f'(x) > 0 \quad \forall x \neq c \Rightarrow c$ è un punto di **flesso a tangente orizzontale**

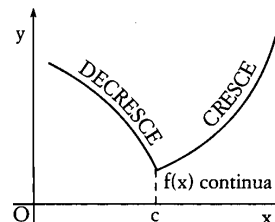
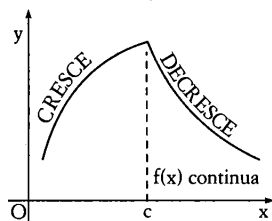
cioè se la funzione rimane sempre crescente oppure sempre decrescente passando da sinistra a destra di c , (si vedano i punti di ascissa c , d nel grafico precedente). Pertanto il punto c è un punto di flesso.

Pertanto, *per stabilire se un punto stazionario è di massimo, di minimo o di flesso a tangente orizzontale, basta studiare il segno della derivata in un intorno del punto c .*



Osservazione

Nel teorema abbiamo supposto che esiste la derivata della funzione nel punto c e risulta uguale a zero. In effetti il teorema continua ad essere valido anche nel caso in cui non esista la derivata nel punto c . Infatti, nei due grafici seguenti, come abbiamo visto nelle osservazioni del paragrafo 4.4, non esiste la derivata nel punto di ascissa c ,



ma in ognuno dei due casi il punto c è un punto estremo (massimo nel primo caso, minimo nel secondo).

Però, come si è visto nel teorema enunciato precedentemente, è necessario, per avere punti di massimo o di minimo relativo che, se esiste la derivata in c , questa deve essere uguale a zero.

N.B. Per determinare i punti di massimo o di minimo relativi, si può anche ricorrere alla derivata seconda:

- ✓ Se $f'(c) = 0$ allora:
 - Se $f''(c) > 0 \Rightarrow c$ è un punto di minimo relativo
 - Se $f''(c) < 0 \Rightarrow c$ è un punto di massimo relativo

6.5. Determinazione della concavità e ricerca dei punti di flesso

Enunciamo ora un teorema che permette di determinare la concavità e i flessi di una funzione $f(x)$.

Teorema

Sia data una funzione $f(x)$ due volte derivabile nei punti interni ad un intervallo I e sia $f''(x)$ continua in I e c un punto interno di I

- ✓ Se $f''(c) > 0 \Rightarrow$ la funzione ha nel punto c la concavità verso l'alto
- ✓ Se $f''(x) < 0 \Rightarrow$ la funzione ha nel punto c la concavità verso il basso
- ✓ Se $f''(c) = 0$ bisogna determinare il segno della derivata seconda passando da sinistra a destra del punto c . Quindi:
 - se $f''(x) < 0 \forall x < c$ e $f''(x) > 0 \forall x > c \Rightarrow c$ è un punto di flesso crescente
 - se $f''(x) > 0 \forall x < c$ e $f''(x) < 0 \forall x > c \Rightarrow c$ è un punto di flesso decrescente



Osservazione

L'ultimo dei tre casi del teorema è conseguenza dei primi due: infatti se il segno della derivata seconda cambia passando da sinistra a destra di c , significa, in base ai primi due casi, che la concavità del grafico della funzione subisce una variazione, cioè siamo in presenza di un flesso.

N.B. Per lo studio dei flessi si può ricorrere anche alla derivata terza, cioè:

- ✓ Se $f''(c) = 0$ allora:
 - se $f'''(c) > 0 \Rightarrow c$ è un punto di flesso crescente
 - se $f'''(c) < 0 \Rightarrow c$ è un punto di flesso decrescente

7. Studio di funzioni

Per effettuare lo studio completo di una funzione bisogna fissare l'attenzione sui seguenti punti:

- ❶ Dopo averla classificata (algebraica o trascendente, razionale intera o fratta, irrazionale...), si determinano eventuali simmetrie (pari o dispari)
- ❷ Si determina il dominio D della funzione e, quindi, gli eventuali punti di discontinuità
- ❸ Si studia il segno della funzione e si determinano di conseguenza l'insieme di positività ($f(x) > 0$), l'insieme di negatività ($f(x) < 0$).
- ❹ Si determinano gli eventuali punti di intersezione della funzione con gli assi cartesiani.
- ❺ Si calcolano i limiti della funzione negli estremi, se esistono, finiti ed infiniti, del dominio e si deducono gli eventuali asintoti orizzontali, verticali ed obliqui.
- ❻ Si calcola la derivata prima $f'(x)$, determinandone il dominio D' . Poi si procede al calcolo dei limiti negli estremi finiti di D' e nei suoi punti di discontinuità, determinando l'inclinazione della tangente nei punti di arrivo e di partenza, gli eventuali punti angolosi, le cuspidi e di flesso a tangente verticale. Infine, si studia il segno della derivata, stabilendo così se vi sono punti stazionari ($f'(x) = 0$), in quali intervalli la funzione è crescente ($f'(x) > 0$) o decrescente ($f'(x) < 0$) e se vi sono punti di massimo, minimo relativo o flessi a tangente orizzontale.
- ❼ Si calcola la derivata seconda e se ne studia il segno, determinando gli intervalli in cui la curva volge la concavità verso l'alto o verso il basso, deducendo, quindi, le coordinate degli eventuali punti di flesso.



7.1. Esempi



Studiare la funzione $f(x) = 3x^3 + 3x$

❶ Si tratta di una funzione algebrica razionale intera. Inoltre, poiché $f(-x) = 3(-x)^3 + 3(-x) = -3x^3 - 3x = -(3x^3 + 3x) = -f(x)$, possiamo dedurre che si tratta di una funzione dispari e pertanto il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine

❷ Essendo intera, il suo dominio è formato da tutti i numeri reali, cioè $D = \mathbb{R}$.

❸ Per determinare il segno risolviamo la disequazione $f(x) > 0$, cioè $3x^3 + 3x > 0 \Rightarrow$

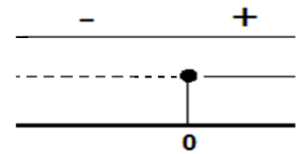
$$x(3x^2 + 3) > 0 \Rightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ 3x^2 + 3 > 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x > 0 \\ x^2 > -1 \end{matrix} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

Pertanto, avremo:

$$f(x) > 0 \quad x > 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]0, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \quad x < 0 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]-\infty, 0[$$

$$f(x) = 0 \quad x = 0$$



❹ Determiniamo adesso le intersezioni con gli assi:

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ x \end{matrix} \begin{cases} y = 3x^3 + 3x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x(3x^2 + 3) \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \rightarrow \\ y \end{matrix} \begin{cases} y = 3x^3 + 3x \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 = 0 + 0 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'unico punto di intersezione con gli assi è il punto $O(0, 0)$

❺ Gli unici estremi del dominio sono quelli infiniti. Pertanto, siamo sicuri che non ci sono asintoti verticali, in quanto non ci sono punti di discontinuità. Avremo, dunque:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 + 3x = 3(+\infty)^3 + 3(+\infty) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 + 3x = 3(-\infty)^3 + 3(-\infty) = -\infty$$

Poiché il risultato non è un numero reale, non esistono gli asintoti orizzontali. Resta da verificare se esistono quelli obliqui:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3(x^2 + 1) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^3 + 3x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 3(x^2 + 1) = +\infty$$

Non essendo neanche questi valori numerici, possiamo affermare con certezza che non vi sono asintoti obliqui.

Pertanto, la curva non possiede alcun tipo di asintoto

❻ Procediamo, adesso con il calcolo della derivata:

$$f'(x) = 9x^2 + 3$$



Si ha $D' = D = \mathbb{R}$, in quanto anche la derivata è razionale intera. Pertanto, non vi sono punti del dominio in cui la funzione non è derivabile. Andando a studiare il segno della derivata, notiamo che essa, essendo somma di un numero non negativo con un numero positivo, è sempre positiva. Infatti:

$$f'(x) > 0 \Rightarrow 9x^2 + 3 > 0 \Rightarrow x^2 > -\frac{1}{3} \Rightarrow \forall x \in \mathbb{R}$$

Dunque:

$f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ la funzione $f(x)$ è sempre crescente

$f'(x) \leq 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R}$ (impossibile)

Poiché il segno della derivata non cambia e non vi sono punti stazionari, non esistono massimi, minimi o flessi a tangente orizzontale

Infine, calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = 18x$$

Dunque, $f''(x) > 0 \Rightarrow 18x > 0 \Rightarrow x > 0$

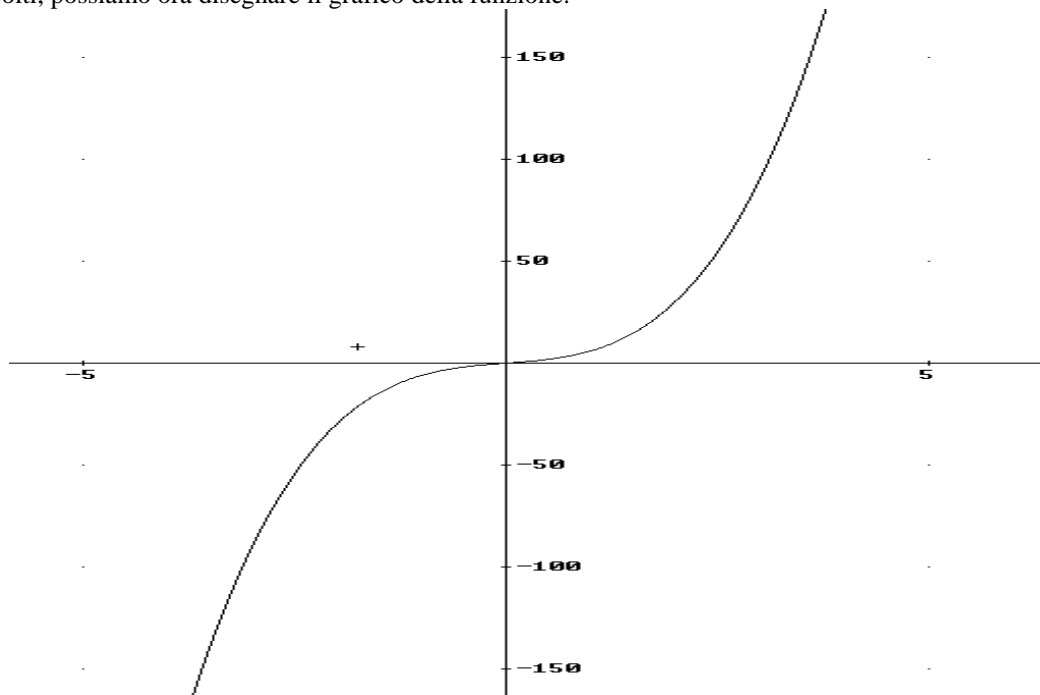
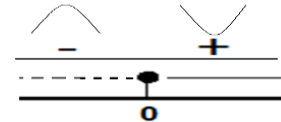
$f''(x) > 0 \quad x > 0 \Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[\Rightarrow f(x)$ volge la concavità verso l'alto

$f''(x) < 0 \quad x < 0 \Rightarrow \forall x \in]-\infty; 0[\Rightarrow f(x)$ volge la concavità verso il basso

$f''(x) = 0 \quad x = 0$

Poiché nel punto di ascissa 0 la concavità della funzione cambia ed essendo $f(x)$ continua in 0, possiamo affermare con certezza che il punto di ascissa 0, cioè $O(0, 0)$ è un flesso crescente

Dai dati raccolti, possiamo ora disegnare il grafico della funzione:





Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{2x-1}{x-3}$$

1 Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta. Inoltre, poiché $f(-x) = \frac{2(-x)-1}{-x-3} = \frac{-2x-1}{-x-3}$, possiamo dedurre che si tratta di una funzione né pari né dispari e pertanto il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine

2 Essendo fratta, il suo dominio è formato da tutti i numeri reali esclusi quelli che annullano il denominatore, cioè bisogna risolvere $x-3 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{3\}$

3 Per determinare il segno risolviamo la disequazione $f(x) > 0$, cioè $\frac{2x-1}{x-3} > 0 \Rightarrow$

Num. : $2x - 1 > 0 \Rightarrow x > \frac{1}{3}$

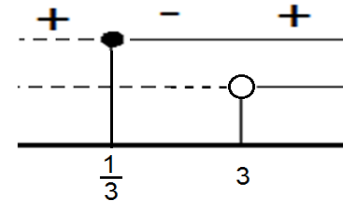
Denom : $x - 3 > 0 \Rightarrow x > 3$

Pertanto, avremo:

$$f(x) > 0 \quad x < \frac{1}{3} \vee x > 3 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]-\infty, \frac{1}{3}[\cup]3, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \quad \frac{1}{3} < x < 3 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]\frac{1}{3}, 3[$$

$$f(x) = 0 \quad x = \frac{1}{3}$$



4 Determiniamo adesso le intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \frac{2x-1}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \frac{2x-1}{x-3} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x-1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{2x-1}{x-3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{2 \cdot 0 - 1}{0 - 3} = \frac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{3} \\ x = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti di intersezione con gli assi sono: $A(\frac{1}{2}; 0)$, $B(0; \frac{1}{3})$

5 Gli estremi del dominio sono quelli infiniti e il punto 3. Calcoliamo i limiti in tali estremi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{x} \right)}{\left(1 - \frac{3}{x} \right)} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x-1}{x-3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(2 - \frac{1}{x} \right)}{x \left(1 - \frac{3}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(2 - \frac{1}{x} \right)}{\left(1 - \frac{3}{x} \right)} = 2$$

Poiché i risultati sono numerici, possiamo affermare che $y = 2$ è asintoto orizzontale sia destro che sinistro.

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x-1}{x-3} = \frac{2 \cdot 3 - 1}{3 - 3} = \frac{5}{0} = \left(\begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-1}{x-3} = +\infty \quad (\text{poichè a destra di 3 la funzione è positiva}) \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-1}{x-3} = -\infty \quad (\text{poichè a sinistra di 3 la funzione è negativa}) \end{array} \right.$$

Dunque, $x = 3$ è un asintoto verticale sia destro che sinistro

Poiché abbiamo l'esistenza degli asintoti orizzontali, non occorre andare a determinare quelli obliqui.

6 Procediamo, adesso con il calcolo della derivata:

$$f'(x) = \frac{2(x-3) - 1(2x-1)}{(x-3)^2} = \frac{2x-6-2x+1}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}$$

Si ha $D' = D = \mathbb{R} - \{3\}$, Pertanto, non vi sono punti del dominio in cui la funzione non è derivabile.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{-5}{(x-3)^2} > 0 \Rightarrow \frac{5}{(x-3)^2} < 0$$

Essendo la frazione formata da termini positivi, non può essere negativa. Pertanto il risultato della disequazione è impossibile. Quindi :

$$f'(x) \geq 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R} \quad (\text{impossibile})$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{la funzione } f(x) \text{ è sempre decrescente}$$

Poiché il segno della derivata non cambia e non vi sono punti stazionari, non esistono massimi, minimi o flessi a tangente orizzontale

7 Infine, calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{0 \cdot (x-3)^2 - 2(x-3) \cdot (-5)}{(x-3)^4} = \frac{10(x-3)}{(x-3)^4} = \frac{10}{(x-3)^3}$$

Studiando il segno della derivata, possiamo trascurare il denominatore, essendo questo sicuramente positivo. Pertanto, il risultato dipende dal denominatore:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow (x-3)^3 > 0 \Rightarrow (x-3) > 0 \Rightarrow x > 3$$

Quindi:

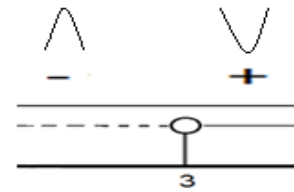
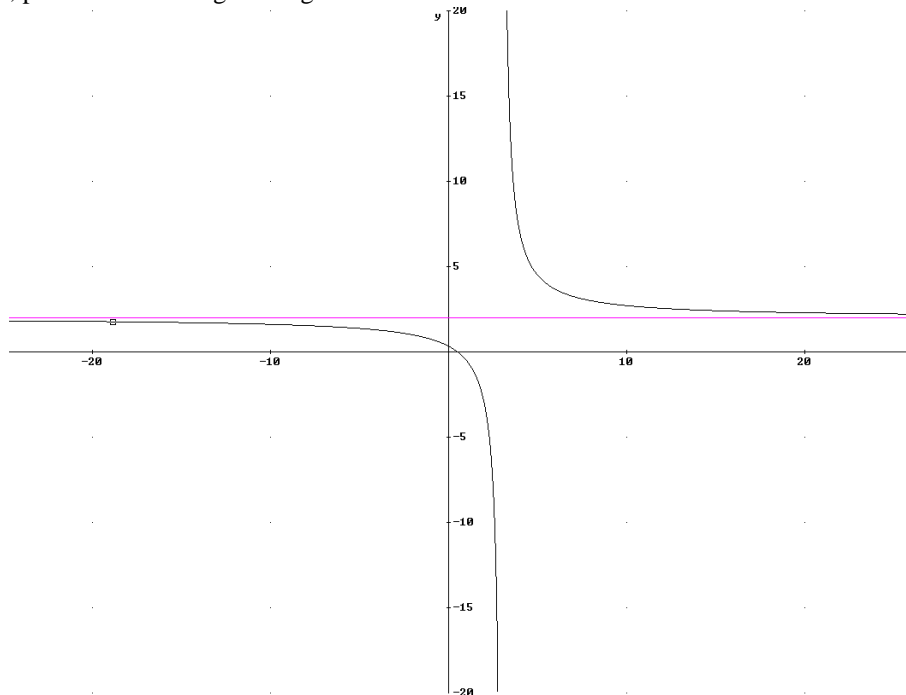
$$f''(x) > 0 \quad x > 3 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]3, +\infty[\quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ volge la concavità verso l'alto}$$

$$f''(x) < 0 \quad x < 3 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]-\infty; 3[\quad \Rightarrow \quad f(x) \text{ volge la concavità verso il basso}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{Impossibile} \quad (\text{poichè } 3 \text{ è escluso dal dominio})$$

Nel punto di ascissa 3 la concavità della funzione cambia, ma, poichè $f(x)$ è discontinua in 3, possiamo affermare che la curva non presenta alcun flesso

Dai dati raccolti, possiamo ora disegnare il grafico della funzione:





Studiare la funzione:

$$f(x) = \frac{x}{x^2 - 1}$$

❶ Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta. Inoltre, poiché $f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = \frac{-x}{x^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1}$, possiamo dedurre che si tratta di una funzione dispari e pertanto il suo grafico è simmetrico rispetto all'origine

❷ Essendo fratta, il suo dominio è formato da tutti i numeri reali esclusi quelli che annullano il denominatore, cioè bisogna risolvere $x^2 - 1 \neq 0 \Rightarrow x^2 \neq 1 \Rightarrow x \neq \pm 1 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$

❸ Per determinare il segno risolviamo la disequazione $f(x) > 0$, cioè $\frac{x}{x^2 - 1} > 0 \Rightarrow$

Num. : $x > 0$

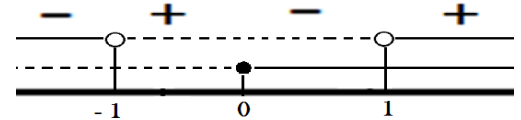
Denom : $x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$

Pertanto, avremo:

$$f(x) > 0 \quad -1 < x < 0 \vee x > 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[$$

$$f(x) < 0 \quad x < -1 \vee 0 < x < 1 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[$$

$$f(x) = 0 \quad x = 0$$



❹ Determiniamo adesso le intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \frac{x}{x^2 - 1} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = x \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{x}{x^2 - 1} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{0}{0^2 - 1} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Pertanto l'unico punto di intersezione con gli assi è $O(0; 0)$

❺ Gli estremi del dominio sono quelli infiniti e i punti di ascissa ± 1 . Calcoliamo i limiti in tali estremi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{+\infty} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

Poiché i risultati sono numerici, possiamo affermare che $y = 0$ è asintoto orizzontale sia destro che sinistro.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty \quad (\text{poichè a destra di } 1 \text{ la funzione è positiva}) \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \quad (\text{poichè a sinistra di } 1 \text{ la funzione è negativa}) \end{array} \right.$$

Dunque, $x = 1$ è un asintoto verticale sia destro che sinistro

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x}{x^2 - 1} = \frac{-1}{1 - 1} = \frac{1}{0} = \left\langle \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{x^2 - 1} = +\infty \quad (\text{poichè a destra di } -1 \text{ la funzione è positiva}) \\ \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x}{x^2 - 1} = -\infty \quad (\text{poichè a sinistra di } -1 \text{ la funzione è negativa}) \end{array} \right.$$

Dunque, $x = -1$ è un asintoto verticale sia destro che sinistro

Poiché abbiamo l'esistenza degli asintoti orizzontali, non occorre andare a determinare quelli obliqui.

6 Procediamo, adesso con il calcolo della derivata:

$$f'(x) = \frac{1(x^2 - 1) - 2x \cdot x}{(x^2 - 1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2 - 1)^2} = \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2}$$

Si ha $D' = D = \mathbb{R} - \{\pm 1\}$, Pertanto, non vi sono punti del dominio in cui la funzione non è derivabile.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 - 1}{(x^2 - 1)^2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 + 1}{(x^2 - 1)^2} < 0$$

Essendo la frazione formata da termini positivi, non può essere negativa. Pertanto il risultato della disequazione è impossibile. Quindi :

$$f'(x) \geq 0 \quad \nexists x \in \mathbb{R} \quad (\text{impossibile})$$

$$f'(x) < 0 \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad \Rightarrow \quad \text{la funzione } f(x) \text{ è sempre decrescente}$$

Poiché il segno della derivata non cambia e non vi sono punti stazionari, non esistono massimi, minimi o flessi a tangente orizzontale.

7 Infine, calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{-2x \cdot (x^2 - 1)^2 - 2(x^2 - 1) \cdot 2x \cdot (-x^2 - 1)}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(x^2 - 1)[-2x \cdot (x^2 - 1) - 4x(-x^2 - 1)]}{(x^2 - 1)^4} =$$

$$= \frac{(x^2 - 1)[-2x^3 + 2x + 4x^3 + 4x]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{(x^2 - 1)[2x^3 + 6x]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x(x^2 - 1)[x^2 + 3]}{(x^2 - 1)^4} = \frac{2x[x^2 + 3]}{(x^2 - 1)^3}$$

Trascurando $2(x^2 + 3)$, in quanto è un termine sicuramente positivo, si ha:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{2x[x^2 + 3]}{(x^2 - 1)^3} > 0 \Rightarrow \frac{x}{(x^2 - 1)^3} > 0$$

Num: $x > 0$

$$\text{Denom. } (x^2 - 1)^3 > 0 \Rightarrow x^2 - 1 > 0 \Rightarrow x < -1 \vee x > 1$$

Quindi:

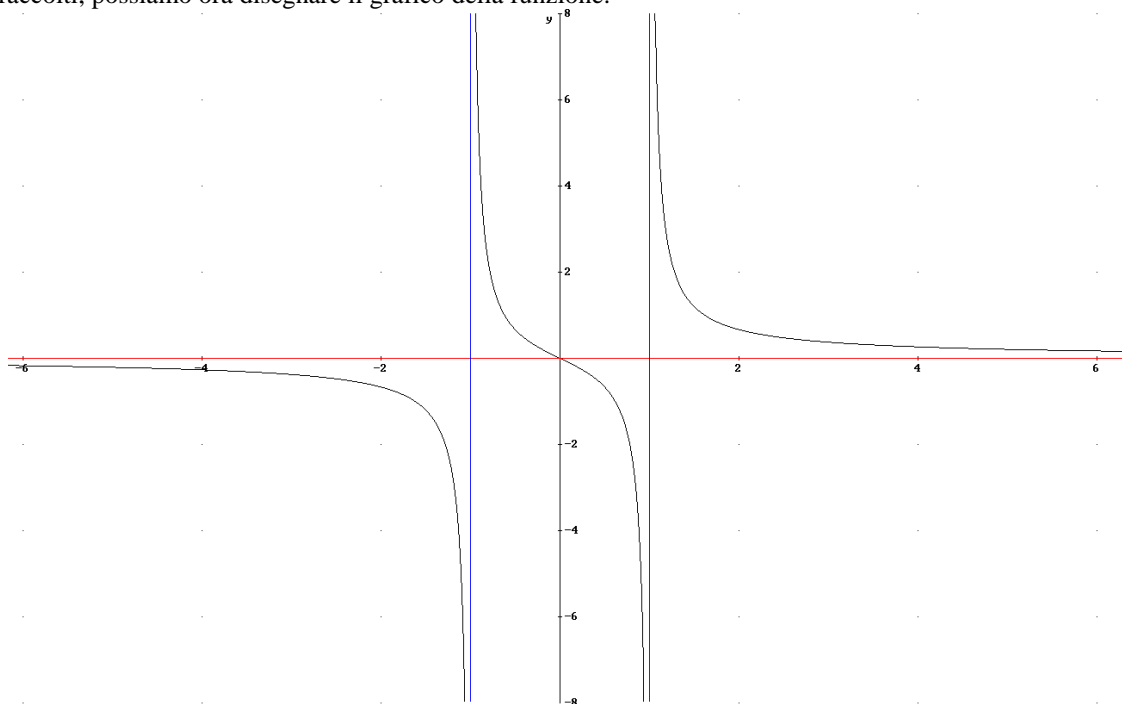
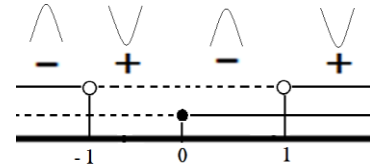
$$f''(x) > 0 \quad -1 < x < 0 \vee x > 1 \Rightarrow \forall x \in]-1, 0[\cup]1, +\infty[\Rightarrow f(x) \text{ volge la concavità verso l'alto}$$

$$f''(x) < 0 \quad x < -1 \vee 0 < x < 1 \Rightarrow \forall x \in]-\infty, -1[\cup]0, 1[\Rightarrow f(x) \text{ volge la concavità verso il basso}$$

$$f''(x) = 0 \quad x = 0 \quad (\text{poichè } 3 \text{ è escluso dal dominio})$$

La concavità della funzione cambia nel punto di ascissa 0 e nei punti di ascissa ± 1 , ma, poiché $f(x)$ è discontinua in ± 1 , possiamo affermare che la curva presenta un solo flesso nel punto di ascissa 0, cioè nel punto $O(0; 0)$

Dai dati raccolti, possiamo ora disegnare il grafico della funzione:





Studiare la funzione: $f(x) = \frac{3x - x^2}{x - 4}$

❶ Si tratta di una funzione algebrica razionale fratta. Inoltre, poiché $f(-x) = \frac{3(-x) - (-x^2)}{-x - 4} = \frac{-3x - x^2}{-x - 4}$, possiamo dedurre che si tratta di una funzione né pari né dispari.

❷ Essendo fratta, il suo dominio è formato da tutti i numeri reali esclusi quelli che annullano il denominatore, cioè bisogna risolvere $x - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq 4 \Rightarrow D = \mathbb{R} - \{4\}$

❸ Per determinare il segno risolviamo la disequazione $f(x) > 0$, cioè $\frac{3x - x^2}{x - 4} > 0 \Rightarrow$

$$\text{Num. : } 3x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 - 3x < 0 \Rightarrow x(x - 3) < 0 \Rightarrow 0 < x < 3$$

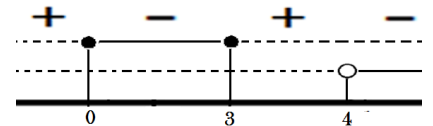
$$\text{Denom : } x - 4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

Pertanto, avremo:

$$f(x) > 0 \quad x < 0 \vee 3 < x < 4 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]-\infty, 0[\cup]3, 4[$$

$$f(x) < 0 \quad 0 < x < 3 \vee x > 4 \quad \Rightarrow \quad \forall x \in]0; 3[\cup]4, +\infty[$$

$$f(x) = 0 \quad x = 0 \vee x = 3$$



❹ Determiniamo adesso le intersezioni con gli assi:

$$\begin{cases} y = \frac{3x - x^2}{x - 4} \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = 3x - x^2 \\ y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \vee x = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = \frac{3x - x^2}{x - 4} \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{3 \cdot 0 - 0}{0 - 4} = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

Pertanto i punti di intersezione con gli assi cartesiani sono $O(0; 0)$ ed $A(3, 0)$.

❺ Gli estremi del dominio sono quelli infiniti e il punto di ascissa 4. Calcoliamo i limiti in tali estremi:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x^2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{\left(1 - \frac{4}{x} \right)} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - x^2}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{\left(1 - \frac{4}{x} \right)} = -\infty$$

Poiché i risultati non sono numerici, non vi sono asintoti orizzontali. Resta da verificare se esistono quelli obliqui:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x - x^2}{x - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{\left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x^2}{x - 4} + x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - x^2 + x^2 - 4x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{3x - x^2}{x - 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 \left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{x \left(1 - \frac{4}{x} \right)} \cdot \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\left(\frac{3}{x} - 1 \right)}{\left(1 - \frac{4}{x} \right)} = \frac{-1}{1} = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - mx) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - x^2}{x - 4} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x - x^2 + x^2 - 4x}{x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x}{x - 4} = -1$$

Pertanto la retta $y = -x - 1$ è un asintoto obliquo sia destro che sinistro.

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3x - x^2}{x - 4} = \frac{12 - 16}{4 - 4} = \frac{-4}{0} = \left\{ \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{3x - x^2}{x - 4} = -\infty \text{ (poichè a destra di 4 la funzione è negativa)} \\ \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{3x - x^2}{x - 4} = +\infty \text{ (poichè a sinistra di 4 la funzione è positiva)} \end{array} \right.$$

Dunque, $x = 4$ è un asintoto verticale sia destro che sinistro

6 Procediamo, adesso con il calcolo della derivata:

$$f'(x) = \frac{(3 - 2x)(x - 4) - 1(3x - x^2)}{(x - 4)^2} = \frac{3x - 12 - 2x^2 + 8x - 3x + x^2}{(x - 4)^2} = \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x - 4)^2}$$

Si ha $D' = D = \mathbb{R} - \{4\}$, Pertanto, non vi sono punti del dominio in cui la funzione non è derivabile.

$$f'(x) > 0 \Rightarrow \frac{-x^2 + 8x - 12}{(x - 4)^2} > 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 8x + 12}{(x - 4)^2} < 0$$

Possiamo trascurare il denominatore perché, essendo un quadrato è sicuramente positivo. Pertanto:

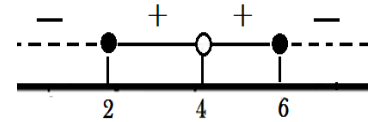
$$x^2 - 8x + 12 > 0 \Rightarrow \Delta = 64 - 48 = 16 \Rightarrow x = \frac{8 \pm \sqrt{16}}{2} = \frac{8 \pm 4}{2} = \left\langle \frac{6}{2} \Rightarrow x < 2 \vee x > 6 \right.$$

Però, $f'(x) > 0$ dove la frazione è negativa. Dunque avremo:

$$f'(x) \geq 0 \quad 2 < x < 4 \vee 4 < x < 6 \Rightarrow \text{la funzione } f(x) \text{ è crescente}$$

$$f'(x) < 0 \quad x < 2 \vee x > 6 \Rightarrow \text{la funzione } f(x) \text{ è decrescente}$$

$$f'(x) = 0 \quad x = 2 \vee x = 6 \Rightarrow \text{punti stazionari}$$



Poiché passando da sinistra a destra dei due punti stazionari, la derivata cambia segno, possiamo dire con certezza che essi sono punti estremanti: esattamente, 2 è un minimo (prima decresce e poi cresce), 6 un massimo (prima cresce e poi decresce)

7 Infine, calcoliamo la derivata seconda:

$$f''(x) = \frac{(-2x+8) \cdot (x-4)^2 - 2(x-4) \cdot (-x^2+8x-12)}{(x-4)^4} = \frac{(x-4)[(-2x+8) \cdot (x-4) - 2(-x^2+8x-12)]}{(x^2-1)^4} =$$

$$= \frac{(x-4)[-2x^2+8x+8x-32+2x^2-16x+24]}{(x-4)^4} = \frac{-8(x-4)}{(x-4)^4} = \frac{-8}{(x-4)^3}$$

Pertanto:

$$f''(x) > 0 \Rightarrow \frac{-8}{(x-4)^3} > 0 \Rightarrow \frac{8}{(x-4)^3} < 0$$

Trascurando il numeratore che è positivo, avremo:

$$(x-4)^3 > 0 \Rightarrow x-4 > 0 \Rightarrow x > 4$$

Però, $f''(x) > 0$ dove la frazione è negativa. Dunque avremo:

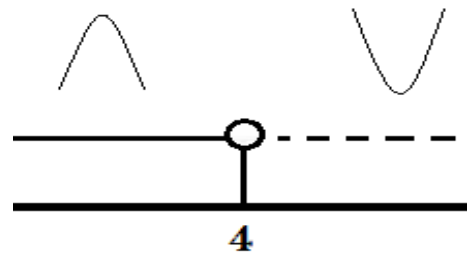
$$f''(x) > 0 \quad x < 4 \Rightarrow \forall x \in]-\infty, 4[\Rightarrow f(x) \text{ volge la concavità verso l'alto}$$

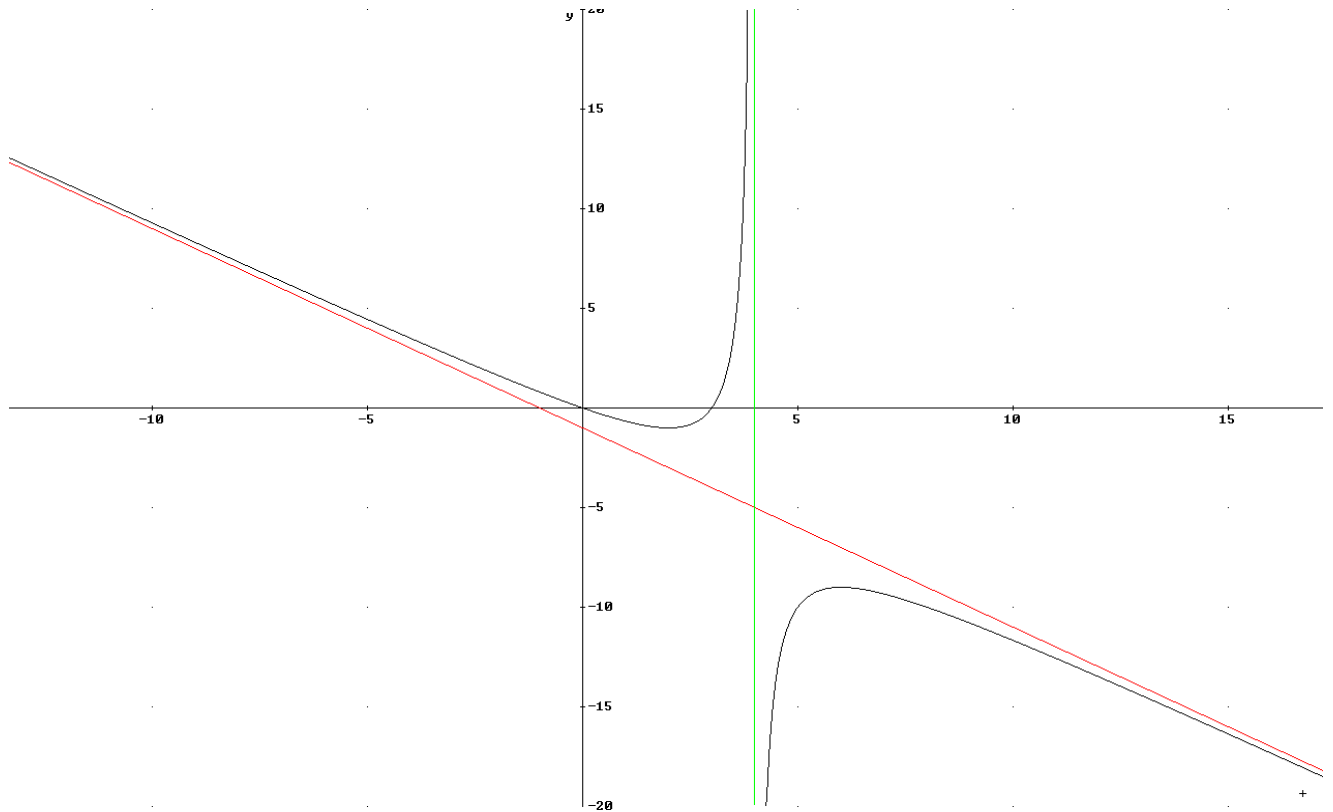
$$f''(x) < 0 \quad x > 4 \Rightarrow \forall x \in]4, +\infty[\Rightarrow f(x) \text{ volge la concavità verso il basso}$$

$$f''(x) = 0 \quad \text{Impossibile (poichè il numeratore non è mai uguale a zero)}$$

La concavità della funzione cambia nel punto di ascissa 4, ma, poiché $f(x)$ è discontinua in 4, possiamo affermare che la curva non presenta alcun flesso.

Dai dati raccolti, possiamo ora disegnare il grafico della funzione:





7.2. Esercizi vari

a. $y = x(x^2 - 1)^2$

i. Dominio:

$$\mathcal{D}: \mathcal{R}$$

Visto che è un polinomio

ii. Simmetrie e Periodicità¹

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{funzione dispari}$$

iii. Positività

$$y \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 0$$

$$y < 0 \Leftrightarrow x < 0 \wedge x \neq \pm 1$$

iv. Intersezioni assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \wedge x = \pm 1 \end{cases}$$

v. Asintoti verticali²: non ci sono poiché il dominio è \mathcal{R} ;

vi. Asintoti orizzontali³:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \pm\infty \text{ solo a } +\infty \text{ per ragioni di simmetria}$$

vii. Asintoti obliqui⁴ non ci sono, infatti:

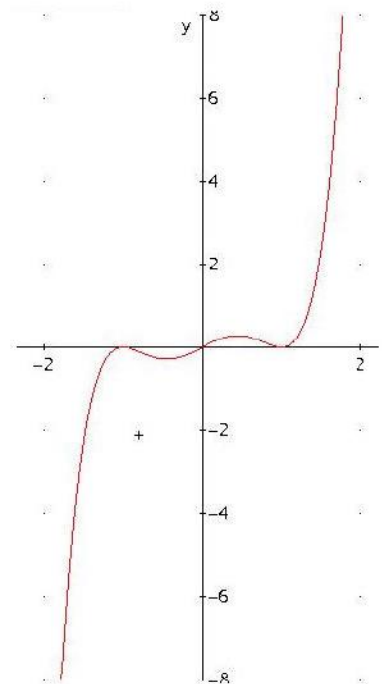
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \infty$$

viii. Monotonia, massimi e minimi⁵:

$$y' = (x^2 - 1)(5x^2 - 1)$$

ix. Concavità e flessi⁶:

$$y'' = 4x(5x^2 - 3)$$



b. $y = \frac{x-1}{x+1}$

i. Dominio:

$$\mathcal{D}: \mathbb{R} - \{-1\}$$

Visto che è una funzione fratta

ii. Simmetrie e Periodicità

La funzione non ha particolari simmetrie, e non è periodica

iii. Positività

$$y > 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee x > 1$$

$$y < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 1$$

iv. Intersezioni assi:

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

v. Asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} y = +\infty \quad \text{quindi } x = -1 \text{ è asintoto verticale}$$

vi. Asintoti orizzontali:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = 1 \quad \text{quindi } y = 1 \text{ è asintoto orizzontale}$$

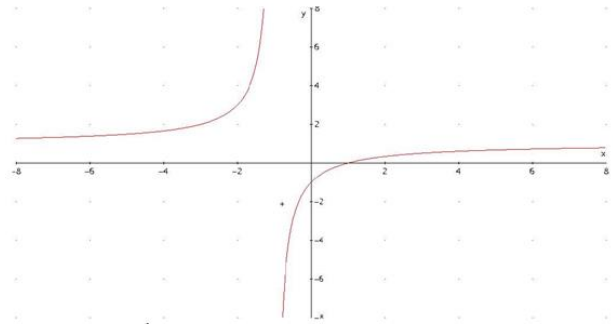
vii. Asintoti obliqui non ci sono poiché ci sono quelli orizzontali

viii. Monotonia, massimi e minimi:

$$y' = \frac{2}{(x+1)^2}$$

ix. Concavità e flessi:

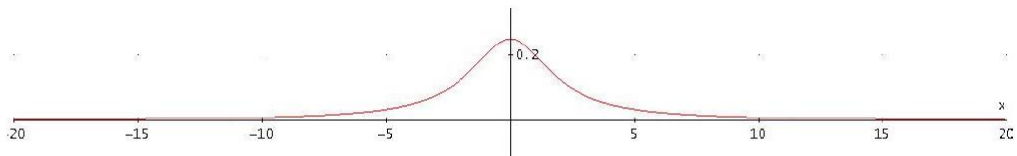
$$y'' = -\frac{4}{(x+1)^3}$$



c. $y = \frac{1}{4+x^2}$

$$y' = \frac{-2x}{(x^2+4)^2}$$

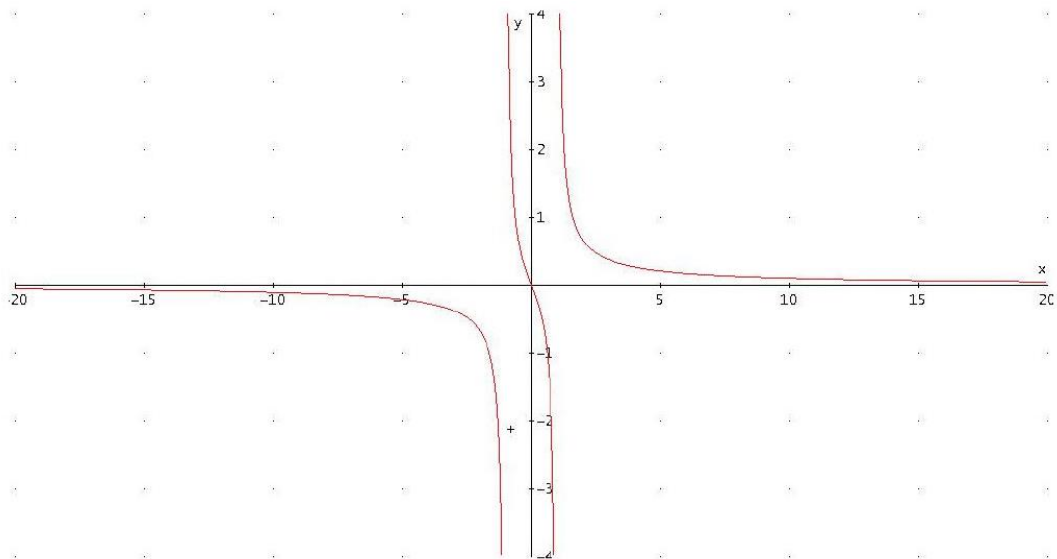
$$y'' = \frac{2(3x^2-4)}{(x^2+4)^3}$$



d. $y = \frac{x}{x^2-1}$

$$y' = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$

$$y'' = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3}$$





e. $y = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

i. Dominio:

$$D: \mathbb{R} - \{\pm 1\}$$

Visto che è una funzione fratta

ii. Simmetrie e Periodicità

$$f(-x) = -f(x) \Rightarrow \text{la funzione è dispari}$$

iii. Positività

$$y > 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0 \vee x > 1$$

$$y < 0 \Leftrightarrow x < -1 \vee 0 < x < 1$$

iv. Intersezioni assi

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

v. Asintoti verticali:

$$\lim_{x \rightarrow \pm 1^\pm} y = \infty \quad \text{quindi } x = \pm 1 \text{ sono asintoti verticali}$$

vi. Asintoti orizzontali non ci sono

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y = \infty \quad \text{poiché il grado del numeratore è maggiore del denominatore}$$

vii. Asintoti obliqui:

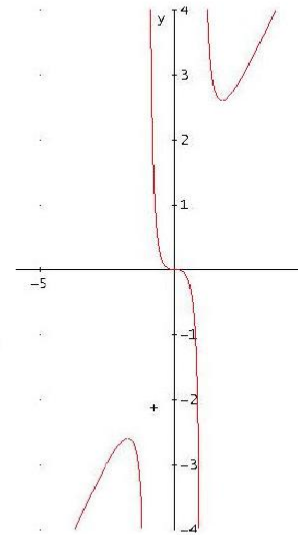
$$\left. \begin{aligned} m &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} \cdot \frac{1}{x} = 1 \\ q &= \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} - x = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = x \text{ è l'asintoto obliquo}$$

viii. Monotonia, massimi e minimi:

$$y' = \frac{x^2(x^2 - 3)}{(x^2 - 1)^2}$$

ix. Concavità e flessi:

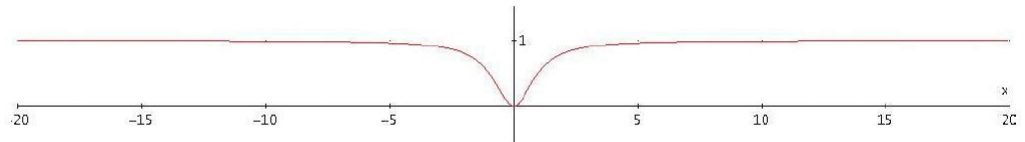
$$y'' = \frac{2x(x^2 + 3)}{(x^2 - 1)^3}$$



f. $y = \frac{x^2}{x^2 + 1}$

$$y' = \frac{2x}{(x^2 + 1)^2}$$

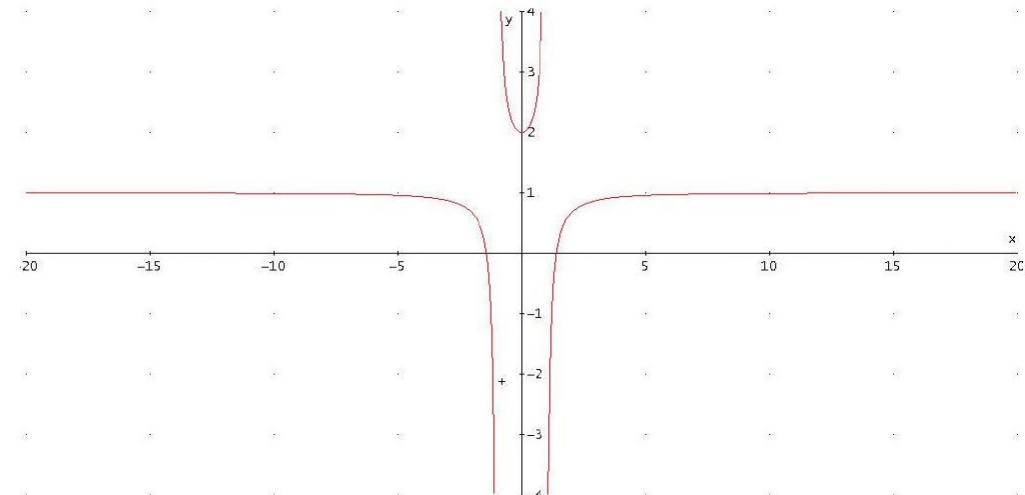
$$y'' = \frac{2(1 - 3x^2)}{(x^2 + 1)^3}$$



g. $y = \frac{x^2 - 2}{x^2 - 1}$

$$y' = \frac{2x}{(x^2 - 1)^2}$$

$$y'' = \frac{2(3x^2 + 1)}{(1 - x^2)^3}$$

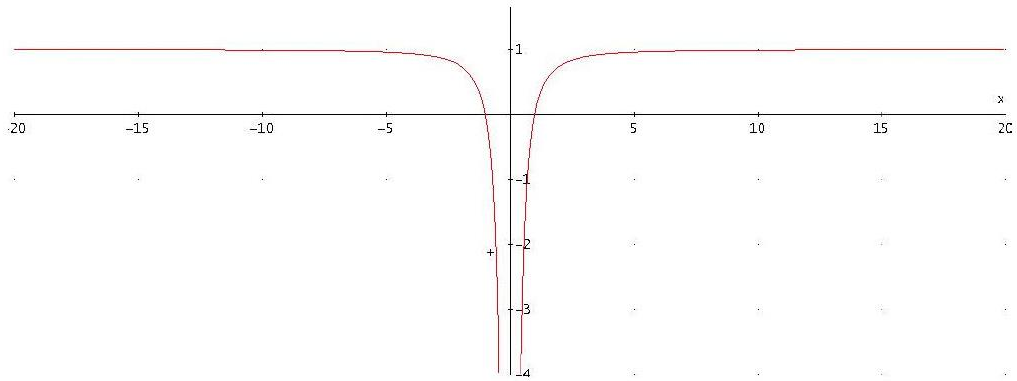




h. $y = \frac{x^2 - 1}{x^2}$

$$y' = \frac{2}{x^3}$$

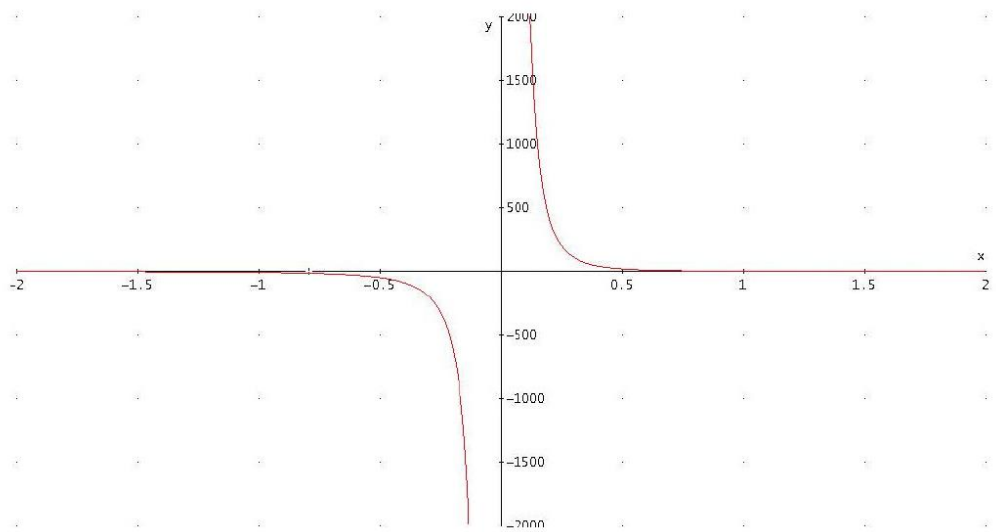
$$y'' = -\frac{6}{x^4}$$



i. $y = \frac{(2-x)^2}{x^3}$

$$y' = \frac{(2-x)(x-6)}{x^4}$$

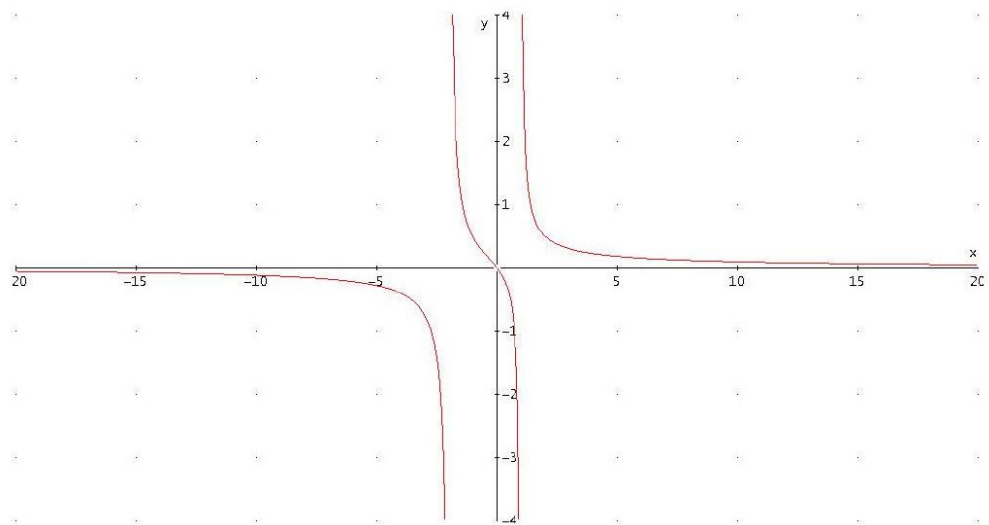
$$y'' = \frac{2(x^2 - 12x + 24)}{x^5}$$



j. $y = \frac{x}{x^2 + x - 2}$

$$y' = -\frac{x^2 + 2}{(x^2 + x - 2)^2}$$

$$y'' = \frac{2(x^3 + 6x + 2)}{(x^2 + x - 2)^3}$$





7.3. Esercitazioni

Studiare le seguenti funzioni:

- 1) $f(x) = \frac{1-x^2}{1+x}$ $D = R - \{-1\}$; $f(x) > 0 \quad x < 1$; As: $y = -x + 1$; $f'(x) = -1$; $f''(x) = 0$
- 2) $f(x) = \frac{x+1}{6-3x}$ $D = R - \{2\}$; $f(x) > 0 \quad -1 < x < 2$; As: $y = -\frac{1}{3}$, $x = 2$; $f'(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$; $f''(x) = -\frac{2}{(x-2)^3}$
- 3) $f(x) = \frac{-4x^2+8x}{x-4}$ $D = R - \{4\}$; $f(x) > 0 \quad x < 0 \vee 2 < x < 4$; As: $y = -4x - 8$; $f'(x) = -\frac{4(x^2-8x+8)}{(x-4)^2}$; $f''(x) = -\frac{64}{(x-4)^3}$
- 4) $f(x) = \frac{x^2-2x+1}{1-x}$ $D = R - \{1\}$; $f(x) > 0 \quad x < 1$; As: $y = -x + 1$; $f'(x) = -1$; $f''(x) = 0$
- 5) $f(x) = \frac{x^2-1}{2x^2-3x+20}$ $D = R$; $f(x) > 0 \quad x < -1 \vee x > 1$; As: $y = \frac{1}{2}$; $f'(x) = -\frac{(3x^2-44x+3)}{(2x^2-3x+20)^2}$; $f''(x) = \frac{2(6x^3-132x^2+18x+431)}{(2x^2-3x+20)^3}$
- 6) $f(x) = \frac{x^2-25}{x^2-4x-32}$ $D = R - \{-4; 8\}$; $f(x) > 0 \quad x < -5 \vee -4 < x < 5 \vee x > 8$; As: $y = 1$, $x = -4$, $x = 8$; $f'(x) = -\frac{2(2x^2+7x+50)}{(x^2-4x-32)^2}$; $f''(x) = \frac{2(4x^3+21x^2+300x-176)}{(x^2-4x-32)^3}$
- 7) $f(x) = \frac{3x^2-6x}{-x^2-3x+10}$ $D = R - \{-5; 2\}$; $f(x) > 0 \quad -5 < x < 0$; As: $y = -3$, $x = -5$; $f'(x) = -\frac{15}{(x+5)^2}$; $f''(x) = \frac{30}{(x+5)^3}$
- 8) $f(x) = \frac{x+1}{x^2+3x-4}$ $D = R - \{-4; 1\}$; $f(x) > 0 \quad -4 < x < -1 \vee x > 1$; As: $y = 0$, $x = -4$, $x = 1$; $f'(x) = -\frac{x^2+2x+7}{(x^2+3x-4)^2}$; $f''(x) = \frac{2(x^3+3x^2+21x+25)}{(x^2+3x-4)^3}$
- 9) $f(x) = \frac{-2x^2-3x+9}{4x^2-9}$ $D = R - \left\{\pm \frac{3}{2}\right\}$; $f(x) > 0 \quad -3 < x < -\frac{3}{2}$; As: $y = -\frac{1}{2}$, $x = -\frac{3}{2}$; $f'(x) = \frac{3}{(2x+3)^2}$; $f''(x) = -\frac{12}{(2x+3)^3}$
- 10) $f(x) = \frac{-4x+12}{2x^2-12x+18}$ $D = R - \{3\}$; $f(x) > 0 \quad x < 3$; As: $y = 0$, $x = 3$; $f'(x) = \frac{2}{(x-3)^2}$; $f''(x) = -\frac{4}{(x-3)^3}$
- 11) $f(x) = \frac{-8x^2-4x}{12x^2+26x+10}$ $D = R - \left\{-\frac{5}{3}; -\frac{1}{2}\right\}$; $f(x) > 0 \quad -\frac{5}{3} < x < 0$; As: $y = -\frac{2}{3}$, $x = -\frac{5}{3}$; $f'(x) = -\frac{10}{(3x+5)^2}$; $f''(x) = \frac{60}{(3x+5)^3}$
- 12) $f(x) = \frac{4x^2-16}{4x^2-16x+16}$ $D = R - \{2\}$; $f(x) > 0 \quad x < -2 \vee x > 2$; As: $y = 1$, $x = 2$; $f'(x) = -\frac{4}{(x-2)^2}$; $f''(x) = \frac{8}{(x-2)^3}$
- 13) $f(x) = \frac{3-x}{(2x-3)(x+1)}$ $D = R - \left\{-1; \frac{3}{2}\right\}$; $f(x) > 0 \quad x < -1 \vee \frac{3}{2} < x < 3$; As: $y = 0$, $x = -1$, $x = \frac{3}{2}$; $f'(x) = \frac{2(x^2-6x+3)}{(x+1)^2(2x-3)^2}$; $f''(x) = -\frac{8(x^3-9x^2+9x-6)}{(x+1)^3(2x-3)^3}$
- 14) $f(x) = \frac{(x+1)(x+2)}{x(x-1)}$ $D = R - \{0; 1\}$; $f(x) > 0 \quad x < -2 \vee -1 < x < 0 \vee x > 1$; As: $y = 1$, $x = 0$, $x = 1$; $f'(x) = -\frac{2(2x^2+2x-1)}{x^2(x-1)^2}$; $f''(x) = \frac{4(2x^3+3x^2-3x+1)}{x^3(x-1)^3}$
- 15) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-2x+2}$ $D = R$; $f(x) > 0 \quad x > 1$; As: $y = 0$; $f'(x) = \frac{x(2-x)}{(x^2-2x+2)^2}$; $f''(x) = \frac{2(x-1)(x^2-2x-2)}{(x^2-2x+2)^3}$
- 16) $f(x) = \frac{x^2+x-1}{x^2+x-2}$ $D = R - \{-2; 1\}$; $f(x) > 0 \quad x < -2 \vee -\frac{\sqrt{5}+1}{2} < x < \frac{\sqrt{5}-1}{2} \vee x > 1$; As: $y = 1$; $x = -2$, $x = 1$; $f'(x) = -\frac{2x+1}{(x^2+x-2)^2}$; $f''(x) = \frac{6(x^2+x+1)}{(x^2+x-2)^3}$
- 17) $f(x) = \frac{2x^2+4x-11}{x^2+2x-8}$ $D = R - \{-4; 2\}$; $f(x) > 0 \quad x < -4 \vee -\frac{\sqrt{26}+2}{2} < x < \frac{\sqrt{26}-2}{2} \vee x > 2$; As: $y = 2$, $x = -4$, $x = 2$; $f'(x) = -\frac{10(x+1)}{(x^2+2x-8)^2}$; $f''(x) = \frac{30(x^2+2x+4)}{(x^2+2x-8)^3}$
- 18) $f(x) = \frac{x^2+10}{x^2+1}$ $D = R$; $f(x) > 0 \quad \forall x \in R$; As: $y = 1$; $f'(x) = -\frac{18x}{(x^2+1)^2}$; $f''(x) = \frac{18(3x^2-1)}{(x^2+1)^3}$
- 19) $f(x) = x^3 - 5x^2 + 7x - 2$ $D = R$; $f(x) > 0 \quad \frac{3-\sqrt{5}}{2} < x < 2 \vee x > \frac{3+\sqrt{5}}{2}$; As: nessuno; $f'(x) = 3x^2 - 10x + 7$; $f''(x) = 6x - 10$
- 20) $f(x) = 4x^3 - x^2 - 14x$ $D = R$; $f(x) > 0 \quad -\frac{7}{4} < x < 0 \vee x > 2$; As: nessuno; $f'(x) = 12x^2 - 2x - 14$; $f''(x) = 24x - 2$



7.4. Test a risposta multipla

1.

$$y = \frac{x-2}{x+2} \quad \text{in } x_0 = -2$$

- a) discontinuità di prima specie b) discontinuità di seconda specie
c) discontinuità di terza specie d) continua.

2.

$$y = \frac{x^3 + 8}{x + 2} \quad \text{in } x_0 = -2$$

- a) discontinuità di prima specie b) discontinuità di seconda specie
c) discontinuità di terza specie d) continua.

3.

$$y = \frac{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}}{x-2} \quad \text{in } x_0 = 2$$

- a) discontinuità di prima specie b) discontinuità di seconda specie
c) discontinuità di terza specie d) continua.

4.

$$y = \frac{x^2 - 25}{|x - 5|} \quad \text{in } x_0 = 5$$

- a) discontinuità di prima specie b) discontinuità di seconda specie
c) discontinuità di terza specie d) continua.

5.

$$y = \frac{\sqrt{x^2 - x^4}}{x} \quad \text{in } x_0 = 0$$

- a) discontinuità di prima specie b) discontinuità di seconda specie
c) discontinuità di terza specie d) continua.

6.

$$y = \frac{x^2 - 4|x| + 4}{x + 2} \quad \text{in } x_0 = -2$$

- a) discontinuità di prima specie b) discontinuità di seconda specie
c) discontinuità di terza specie d) continua.

7.

$$y = \frac{\sqrt{x^2}}{x} \quad \text{in } x_0 = 0$$

- a) discontinuità di prima specie b) discontinuità di seconda specie
c) discontinuità di terza specie d) continua.

8.

$$y = \frac{2x^2 - 5x + 2}{|2 - x|} \quad \text{in } x_0 = 2$$

- a) discontinuità di prima specie b) discontinuità di seconda specie
c) discontinuità di terza specie d) continua.

17.

Se la funzione $y = f(x)$, di dominio R , presenta $\lim_{x \rightarrow c^-} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow c^+} f'(x) = +\infty$, allora essa ammette in c

- a) una cuspide
- b) un asintoto verticale
- c) un flesso a tangente verticale
- d) né a), né b) né c).

18.

Se la funzione $y = f(x)$, di dominio R presenta $f(c) < 0$, $f'(c) > 0$, $f''(c) = 0$, $f'''(c) > 0$ allora essa ammette in c

- a) una discontinuità di prima specie
- b) un punto angoloso
- c) un minimo
- d) un flesso a tangente obliqua.

19.

Esaminando la funzione $y = \frac{x^3}{x^2 + 1}$, si può dire che

- a) è pari
- b) è dispari
- c) è né pari né dispari
- d) il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse x .

- a) ha per dominio R^+
- b) è definita $\forall x \in R$, con $x \neq \pm 1$
- c) è sempre positiva
- d) è sempre crescente.

- a) ha un grafico con due asintoti verticali
- b) ha un grafico con un asintoto orizzontale
- c) ha un grafico con un asintoto obliquo
- d) ha un grafico con due asintoti obliqui.

- a) ha un massimo, un minimo e un flesso a tangente obliqua
- b) non ha flessi
- c) ha una cuspide
- d) né a), né b) né c).

- a) ha tre flessi
- b) ha un solo massimo
- c) ha un solo minimo
- d) né a), né b) né c).

20.

Esaminando la funzione $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{2(x - 1)}$, si può dire che

- a) è pari
- b) è dispari
- c) è né pari né dispari
- d) il suo grafico è simmetrico rispetto all'asse x .

- a) ha un grafico con un asintoto orizzontale
- b) ha un grafico con un asintoto verticale
- c) il suo grafico non ha asintoti obliqui
- d) né a), né b) né c).

- a) il suo grafico è simmetrico rispetto al punto $(1 ; 0)$
- b) il suo grafico non ha un centro di simmetria
- c) è sempre crescente
- d) né a), né b) né c).

- a) l'ordinata del minimo è $\sqrt{2}$
- b) l'ordinata del massimo è $\sqrt{2}$
- c) non ha né massimi, né minimi
- d) né a), né b) né c).

- a) y' è sempre positiva
- b) ha un flesso a tangente verticale per $x = 1$
- c) y' è definita per $x \neq 1$ e $x \neq \frac{1}{2}$
- d) per $x = 1 + \sqrt{2}$ si ha $y' = 0$.

21.

Esaminando la funzione $y = \frac{x}{x^2 + x + 1}$, si può dire che

- | | | | |
|---|--|----------------------|-------------------|
| a) è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ | b) è sempre positiva | | |
| c) non interseca l'asse x | d) non interseca l'asse y . | | |
| a) è sempre crescente | b) è crescente per $x > -1$ | | |
| c) è pari | d) è continua $\forall x \in \mathbb{R}$. | | |
| a) è derivabile $\forall x \in \mathbb{R}$ | b) non è derivabile nell'origine | | |
| c) $y' > 0, \forall x \in (0; +\infty)$ | d) $y' < 0, \forall x \in (0; +\infty)$. | | |
| a) il suo grafico ha due asintoti verticali | b) il suo grafico ha un asintoto orizzontale | | |
| c) il suo grafico ha un asintoto obliquo | d) il suo grafico non ha asintoti di alcun tipo. | | |
| a) ha due massimi | b) ha due flessi | c) ha un solo flesso | d) ha tre flessi. |

22.

Esaminando la funzione $y = \left| \frac{x^2}{x-1} \right|$, si può dire che:

- | | | | |
|---|--|--------------------|------------------------|
| a) è pari | b) è dispari | c) non è mai nulla | d) né a), né b) né c). |
| a) il suo grafico non ha asintoti verticali | | | |
| b) il suo grafico ha due asintoti verticali | | | |
| c) il suo grafico ha un asintoto orizzontale | | | |
| d) presenta una discontinuità di seconda specie nel punto di ascissa 1. | | | |
| a) il suo grafico ha un solo asintoto obliquo | b) il suo grafico ha due asintoti obliqui | | |
| c) il suo grafico non ha asintoti obliqui | d) il suo grafico ha due asintoti orizzontali. | | |
| a) ha due massimi | b) ha un massimo e un minimo | | |
| c) ha due minimi | d) ha un solo minimo e un solo flesso. | | |
| a) per $x = 1$ presenta una cuspid | b) ha un punto angoloso | | |
| c) il suo grafico volge sempre la concavità verso l'alto | d) $y' > 0, \forall x \in \mathbb{R}$. | | |

23.

Esaminando la funzione $y = \frac{(x+1)^3}{x^2}$, si può dire che

- | | | | |
|---|--|-----------------------------|-------------------------------|
| a) è pari | b) è dispari | | |
| c) non è né pari né dispari | d) il suo grafico è simmetrico rispetto alla retta $y = x$. | | |
| a) non ha flessi | b) non ha minimi | | |
| c) ha un minimo di ordinata negativa | d) ha un minimo di ordinata positiva. | | |
| a) il suo grafico ha un solo asintoto che è verticale | | | |
| b) il suo grafico ha un solo asintoto che è orizzontale | | | |
| c) il suo grafico ha un solo asintoto che è obliquo | | | |
| d) né a), né b) né c). | | | |
| a) è definita $\forall x \in \mathbb{R}$ | b) è positiva $\forall x \in \mathbb{R}$ | c) non interseca l'asse y | d) non interseca l'asse x . |
| a) ha una cuspid per $x = 0$ | b) il suo grafico interseca l'asintoto obliquo | | |
| c) ha un punto angoloso per $x = 0$ | d) ha in $O(0; 0)$ un flesso a tangente verticale. | | |

24.

Della funzione $y = \frac{3x^2 - 1}{(x^2 + 1)^3}$, si può dire che

- a) è pari
- b) è dispari
- c) non è né pari né dispari
- d) il suo grafico è simmetrico rispetto alla retta $y = x$.
- a) ha due minimi
- b) ha due massimi
- c) ha solo due flessi
- d) ha tre flessi.
- a) il suo grafico ha due asintoti verticali
- b) il suo grafico ha un asintoto orizzontale
- c) il suo grafico non ha asintoti
- d) il suo grafico ha un asintoto obliquo.
- a) interseca il semiasse positivo delle ascisse in un solo punto
- b) interseca il semiasse positivo delle ascisse in due punti
- c) è sempre positiva
- d) è positiva solo per $x > 1$.
- a) è ovunque derivabile
- b) non è derivabile per $x = \pm 1$
- c) y' è discontinua
- d) né a), né b) né c).

25.

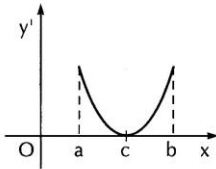
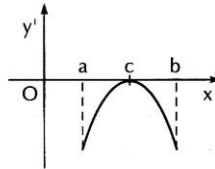
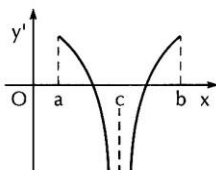
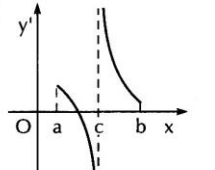
Esaminando la funzione $y = \frac{x^2 - 4}{(x - 1)^2}$, si può dire che

- a) è pari
- b) è dispari
- c) non è né pari né dispari
- d) il suo grafico è simmetrico rispetto alla retta $y = x$.
- a) non ha flessi
- b) non ha minimi
- c) ha un massimo di ordinata negativa
- d) ha un minimo di ordinata positiva.
- a) il suo grafico ha un asintoto verticale
- b) il suo grafico ha un solo asintoto che è orizzontale
- c) il suo grafico ha un solo asintoto che è obliquo
- d) né a), né b) né c).
- a) è definita $\forall x \in \mathbb{R}$
- b) è positiva solo per $x > 2$
- c) non interseca l'asse y
- d) è decrescente per $-2 < x < 0$.
- a) presenta una cuspidè per $x = 1$
- b) il suo grafico interseca l'asintoto orizzontale
- c) presenta un punto angoloso per $x = 1$
- d) per $x = 1$ ha un flesso a tangente verticale.

26.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura , si può affermare che il grafico della funzione

y' potrebbe essere

- a) 
- b) 
- c) 
- d) 

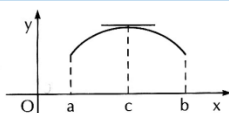
27.

Della funzione $y = \frac{x^3 + 5}{2x}$ si può dire che

- a) è pari
 - b) è dispari
 - c) non è né pari né dispari
 - d) il suo grafico è simmetrico rispetto alla retta $y = x$.
-
- a) ha due minimi
 - b) ha due massimi
 - c) non ha flessi
 - d) ha un solo minimo.
-
- a) il suo grafico ha un flesso a tangente obliqua
 - b) il suo grafico ha un asintoto orizzontale
 - c) ha due flessi
 - d) il suo grafico ha un asintoto obliquo.
-
- a) il suo grafico interseca il semiasse positivo delle ascisse in un solo punto
 - b) il suo grafico non interseca il semiasse positivo delle ascisse
 - c) è sempre crescente
 - d) è positiva solo per $x > \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$.
-
- a) è derivabile solo per $x > \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$
 - b) non è derivabile per $x = -\sqrt[3]{5}$
 - c) $y' < 0$ per $0 < x < \sqrt[3]{\frac{5}{2}}$
 - d) né a), né b) né c).

28.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



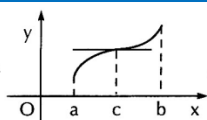
, si può affermare che il grafico della

funzione y' potrebbe essere

- a)
- b)
- c)
- d)

29.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



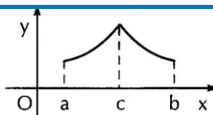
, si può affermare che il grafico della funzione

y' potrebbe essere

- a)
- b)
- c)
- d)

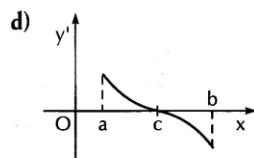
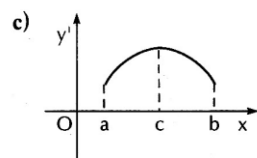
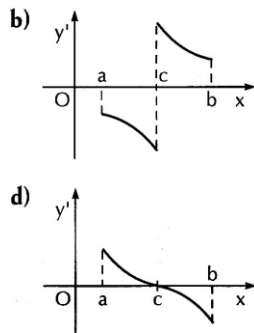
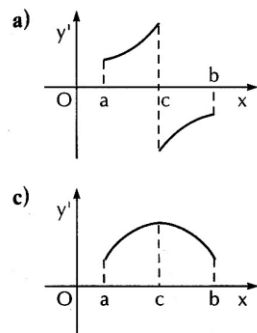
30.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



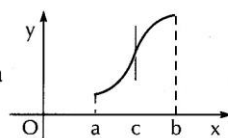
, si può affermare che il grafico della funzione

y' potrebbe essere



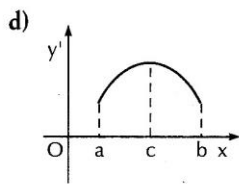
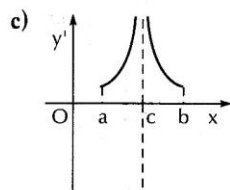
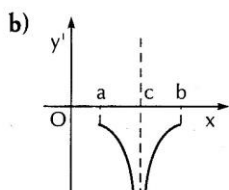
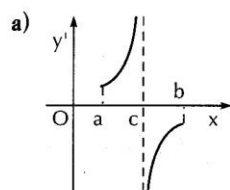
31.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



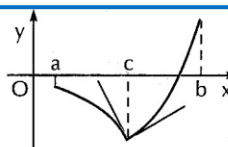
, si può affermare che il grafico della funzione

y' potrebbe essere



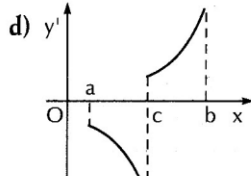
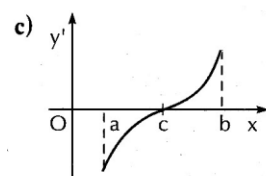
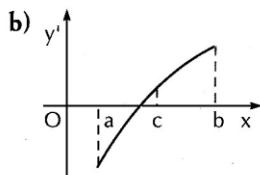
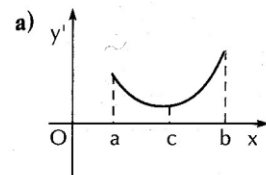
32.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



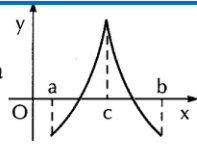
, si può affermare che il grafico della funzione

y' potrebbe essere



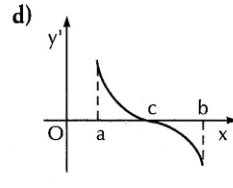
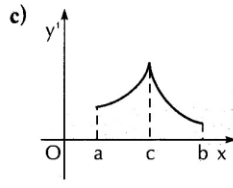
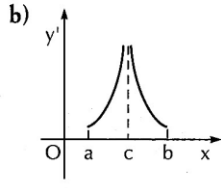
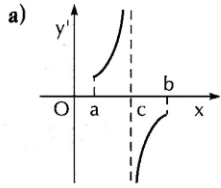
33.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



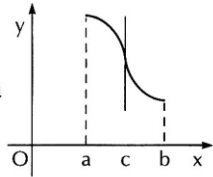
, si può affermare che il grafico della funzione y'

potrebbe essere



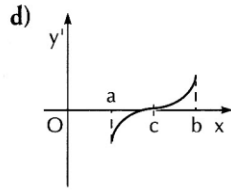
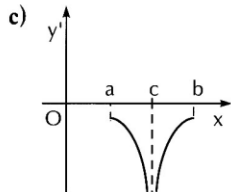
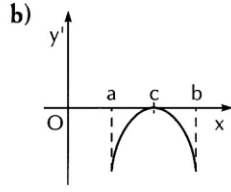
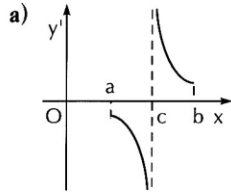
34.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



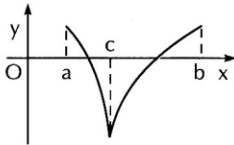
, si può affermare che il grafico della funzione y'

potrebbe essere



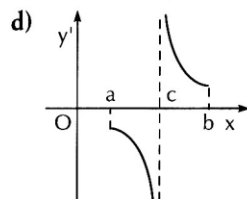
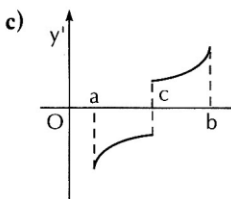
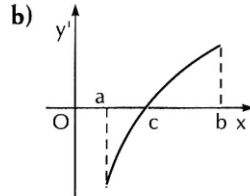
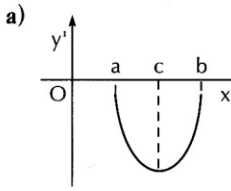
35.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura

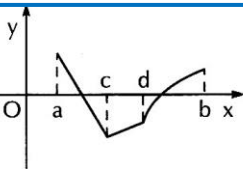


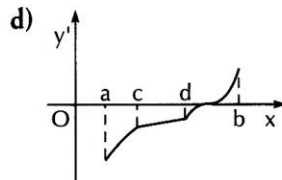
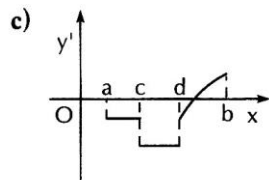
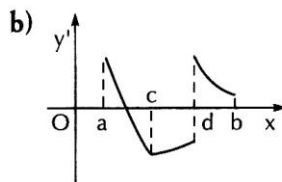
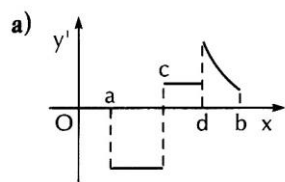
, si può affermare che il grafico della funzione

y' potrebbe essere

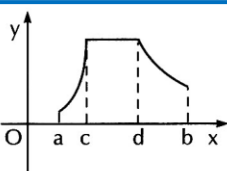


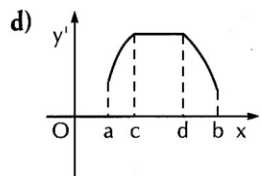
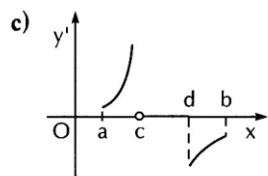
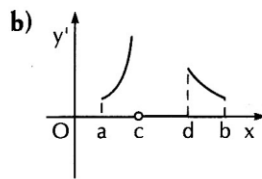
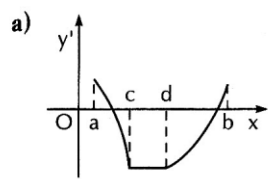
36.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura , si può affermare che il grafico della funzione y' potrebbe essere

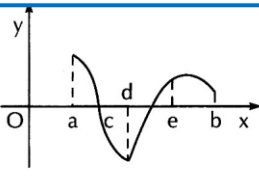


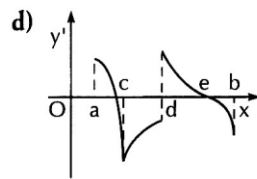
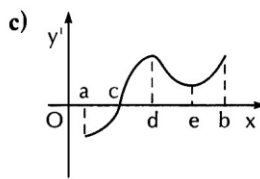
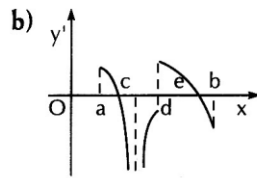
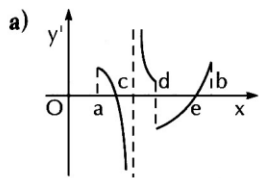
37.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura , si può affermare che il grafico della funzione y' potrebbe essere

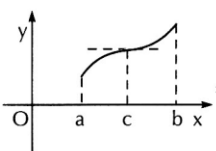


38.

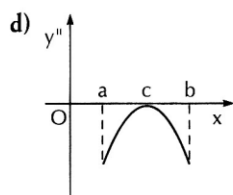
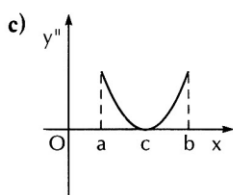
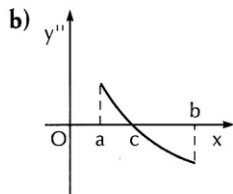
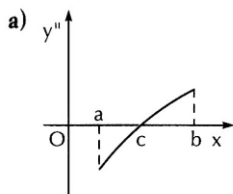
Data la funzione $y = f(x)$ in figura , si può affermare che il grafico della funzione y' potrebbe essere



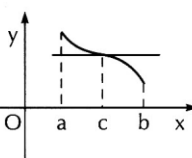
39.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura , si può affermare che il grafico della funzione

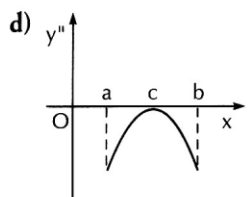
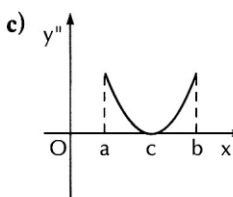
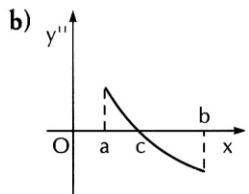
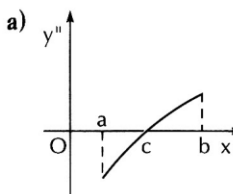
y'' potrebbe essere



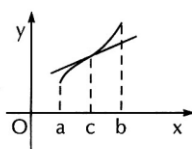
40.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura , si può affermare che il grafico della funzione y''

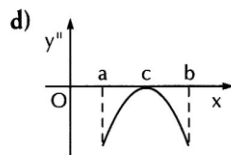
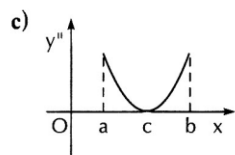
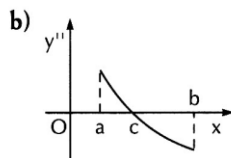
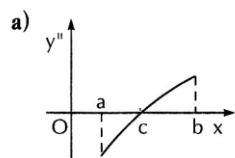
potrebbe essere



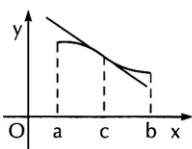
41.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura  , si può affermare che il grafico della funzione y''

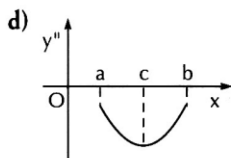
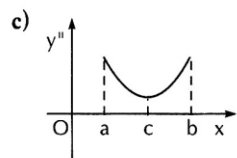
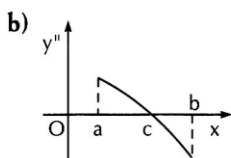
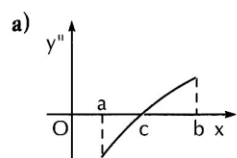
potrebbe essere



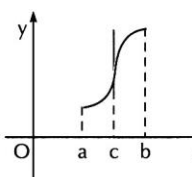
42.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura  , si può affermare che il grafico della funzione y''

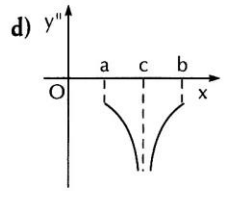
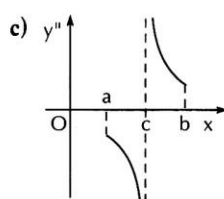
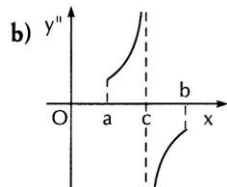
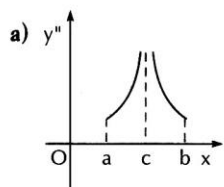
potrebbe essere



43.

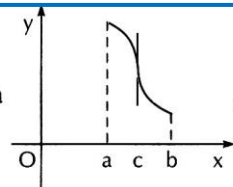
Data la funzione $y = f(x)$ in figura  , si può affermare che il grafico della funzione y''

potrebbe essere



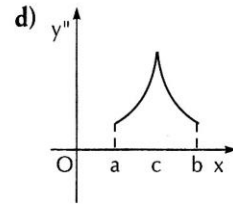
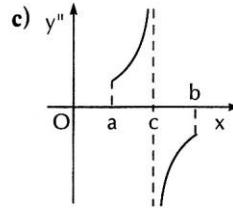
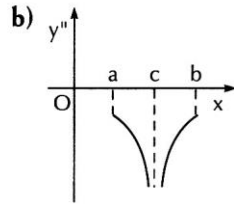
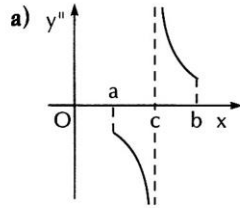
44.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



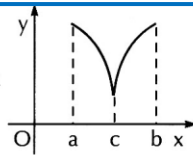
, si può affermare che il grafico della funzione

y'' potrebbe essere



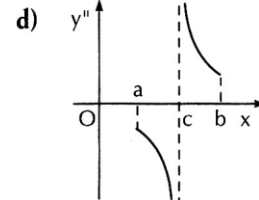
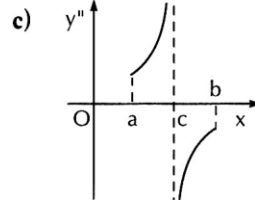
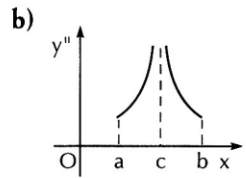
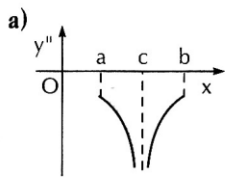
45.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



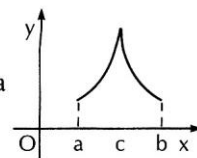
, si può affermare che il grafico della funzione y''

potrebbe essere



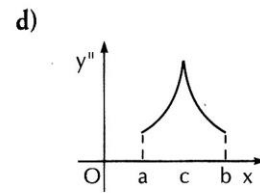
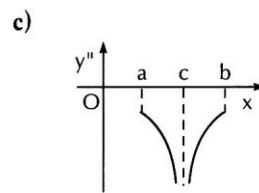
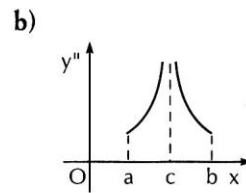
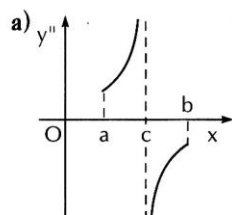
46.

Data la funzione $y = f(x)$ in figura



, si può affermare che il grafico della funzione y''

potrebbe essere



Sommario

1. Equazioni e disequazioni.....	3
1.1. Equazione di secondo grado.....	3
1.2. Disequazioni di secondo grado.....	4
1.3. Equazioni e disequazioni di grado superiore al secondo	3
<i>segnalibro non è definito.</i>	<i>Il</i>
2. La topologia della retta.....	7
2.1. Gli intervalli.....	7
2.2. Gli interni.....	8
3. Le funzioni.....	9
3.1. Le funzioni e le loro caratteristiche.....	9
3.2. Le funzioni matematiche.....	10
3.3. Dominio di una funzione matematica.....	11
3.4. Grafico di una funzione.....	11
3.5. Funzioni pari e dispari.....	12
3.6. Funzioni monotone.....	13
3.7. Esempi di funzioni.....	14
3.8. Funzioni inverse.....	15
3.9. Funzioni composte o funzioni di funzioni.....	16
4. Limiti delle funzioni.....	17
4.1. Definizione di limite.....	17
4.2. Funzioni continue e discontinue.....	19
4.3. Asintoti.....	21

5. Derivata di una funzione	23
5.1. Definizione di derivata.....	23
5.2. Derivate di alcune funzioni elementari.....	24
5.3. Teoremi sulle derivate	25
5.4. Equazione della tangente a una curva in un punto	27
5.5. Esempi:.....	28
5.6. Derivate di ordine superiore al primo	28
6. Teoremi sulle funzioni derivabili.....	30
6.1. Funzioni derivabili crescenti e decrescenti	30
6.2. Massimi, minimi e flessi. Massimi e minimi relativi.....	31
6.3. Concavità e flessi	32
6.4. Ricerca dei massimi e minimi relativi	34
6.5. Determinazione della concavità e ricerca dei punti di flesso.....	35
7. Studio di funzioni	36
7.1. Esempi.....	37
7.2. Esercizi vari.....	45
7.3. Esercitazioni	49
7.4. Test a risposta multipla.....	50