INTEGRALI INDEFINITI

$f : I \to R \qquad F : I \to R$

Si dice che la funzione F (x) è una **primitiva** della funzione f (x) nell'insieme I se F(x) è derivabile in ogni punto di questo intervallo ed ivi risulta:

$$F'(x) = f(x) \qquad \forall\, x \in I$$

TEOREMA

$f : I \to R \qquad F : I \to R$ primitiva di f

C.N.S. affinché $G : I \to R$ sia primitiva di f è che $G(x) = F(x) + c \quad c \in R$

Pertanto se F(x) è una primitiva di f(x), **tutte e sole** le primitive di f(x) sono date dalla formula:

$$F(x) + c$$

con c numero arbitrario reale.

La totalità delle primitive di una funzione f(x) viene detto **integrale indefinito della funzione f(x)** e si indica con il simbolo:

$$\int f(x)dx$$

che si legge integrale indefinito di f(x) d(x)

Si ha dunque:

$$\boxed{\int f(x)dx = F(x) + c}$$

TEOREMA

Ogni funzione continua in un intervallo ammette sempre primitive.

PROPRIETA'

Gli integrali indefiniti godono di alcune importanti proprietà:

1) Una costante moltiplicativa si può trasportare dentro o fuori del segno di integrale indefinito:

$$\boxed{\int k\ f(x)\,dx = k\int f(x)dx}$$

2) L'integrale di una somma algebrica di due o più funzioni è uguale alla somma algebrica degli integrali delle singole funzioni (**metodo di integrazione per decomposizione**)

$$\boxed{\int [f(x) + g(x)]\,dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx}$$

3) Unificando le due proprietà si ottiene:

$$\boxed{\int \left[c_1\, f(x) + c_2\, g(x)\right] dx = c_1 \int f(x)dx + c_2 \int g(x)dx}$$

INTEGRAZIONI IMMEDIATE.

Diamo la tabella di alcuni integrali indefiniti immediati:

$$\int dx = x + c \qquad \forall x \in R$$

$$\left\langle \begin{array}{ll} \displaystyle\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c & n \neq -1 \qquad \forall\ x \in\ R \\ \\ \displaystyle\int x^{-1} dx = \int \frac{1}{x} dx = ln\,|\,x\,| + c & \qquad \forall\ x \in\ R - \{0\} \end{array} \right\rangle$$

$$\int a^x\, dx = \frac{a^x}{ln\, a} + c \qquad \forall\ a > 0\,,\, a \neq 1$$

$$in\ \ particolare \quad \int e^x dx = e^x + c$$

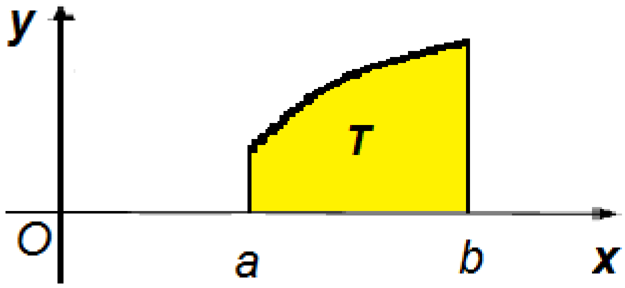
N.B. Le suddette formule possono essere generalizzate sostituendo al posto di x una generica funzione f(x)

INTEGRALI DEFINITI

Sia $f:[a,b]\to \mathbb{R}$ una funzione continua sull'intervallo $[a, b]$ chiuso e limitato.

1. Supponiamo che la funzione sia positiva in [a, b]

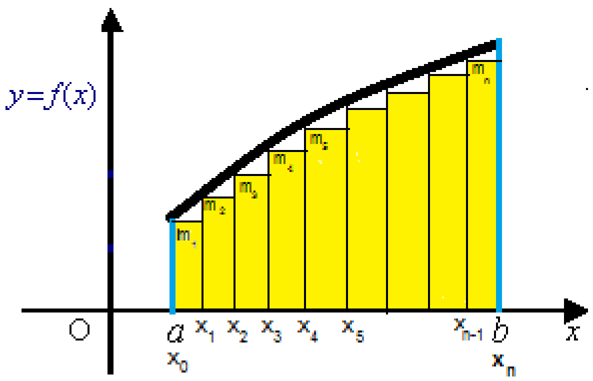
Si chiama **trapezoide o rettangoloide** la figura piana compresa tra il grafico di una funzione f(x) e l’asse delle ascisse.

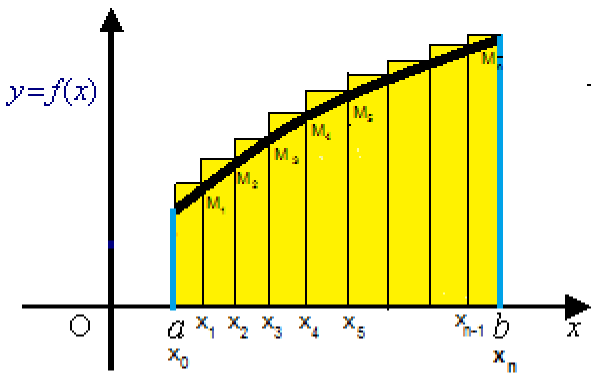


Per calcolare l’area di un trapezoide occorre dividere l’intervallo [a, b] in *n* parti dei quali il primo coincidente con *a* e l'ultimo con *b*:

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

e considerare il **plurirettangolo inscritto** (costituito, dagli insiemi dei rettangoli aventi per base $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e per altezza m_i, dove m_i è il minimo valore assunto dalla funzione *f(x)* nell’i-esimo intervallino) ed il **plurirettangolo circoscritto** (costituito dai rettangoli aventi per base $\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$ e per altezza M_i *dove* M_i è il massimo valore assunto dalla funzione *f(x)* nell’i-esimo intervallino)



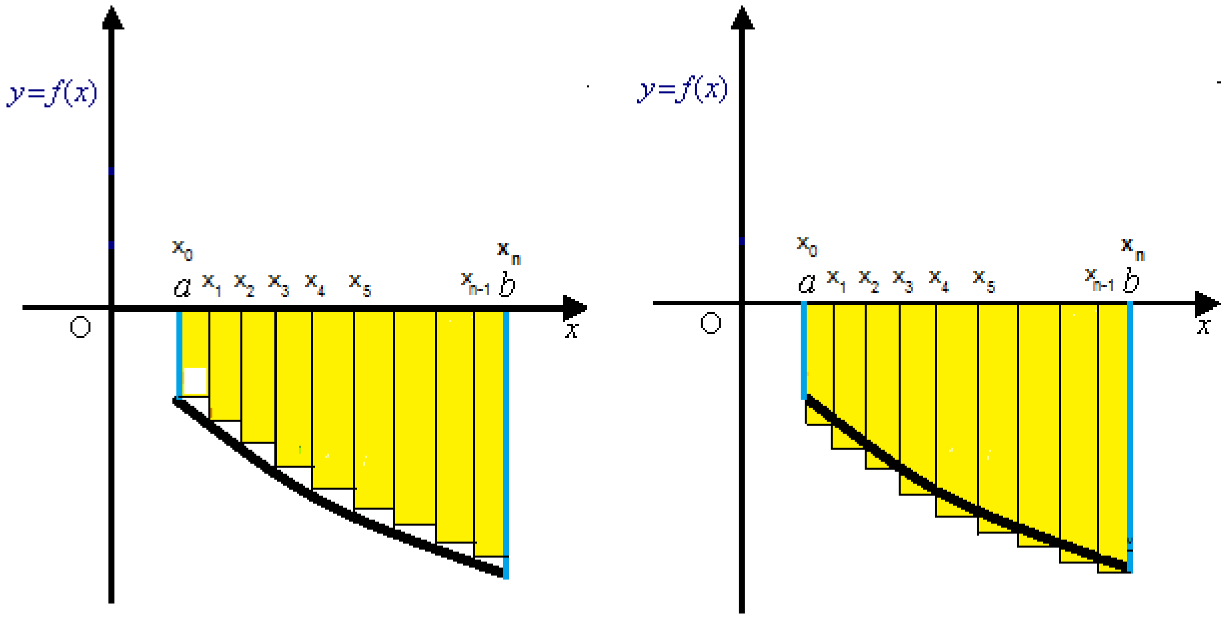


Indicate con $s_n = \sum_{i=1}^{n} m_i (x_{i+1} - x_i)$ l’area del plurirettangolo inscritto detta **somma integrale inferiore** e $S_n = \sum_{i=1}^{n} M_i (x_{i+1} - x_i)$ l’area del plurirettangolo circoscritto, detta **somma integrale superiore,** al variare di n, si può dimostrare che :

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = \text{Area del trapezoide} = \int_a^b f(x)dx$$

2. Se la funzione $f(x)$ è negativa, i valori m_i e M_i sono negativi e pertanto risultano negative anche le somme inferiori e superiori. Dunque:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n = -\text{Area del trapezoide} = \int_a^b f(x)dx$$



PROPRIETA'

1. $\int_a^a f(x)dx = 0$

2. $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

3. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$

4. $\int_a^b \left[c_1 f(x) + c_2 g(x)\right]dx = c_1\int_a^b f(x)dx + c_2\int_a^b g(x)dx$

FUNZIONE INTEGRALE

Sia f : [*a*, *b*] $\to \mathbb{R}$ una funzione continua in un intervallo [a, b] chiuso e limitato

Definiamo **funzione integrale** la funzione *F* : [*a*, *b*] $\to \mathbb{R}$: $F(x) = \int_a^x f(t)dt$

Teorema fondamentale del calcolo integrale (**Teorema di Torricelli**)

F(x) è derivabile $\forall x \in [a,b]$ e risulta F'(x) = f(x)

- quindi la derivata della funzione integrale nel punto x è uguale al valore assunto dalla funzione integranda nello stesso punto x
- la funzione integrale è una primitiva della funzione integranda

Conseguenza Teorema di Torricelli: regola per il calcolo degli integrali definiti

Sia G(x) una primitiva di f(x) $\Rightarrow$ G(x) = F(x) + c = $\int_a^x f(t)\,dt + c$

Tenendo presente che:

G(a) = $\int_a^a f(t)\,dt + c = 0 + c = c$,

G(b) = $\int_a^b f(t)\,dt$ + c = $\int_a^b f(t)\,dt + G(a)$

Otteniamo:

$$\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b}$$