CAMPO MAGNETICO

1. Magneti e loro interazioni

La proprietà della magnetite (ossido di ferro) di attirare la limatura di ferro era già nota a Talete di Mileto nel 600 a.C..

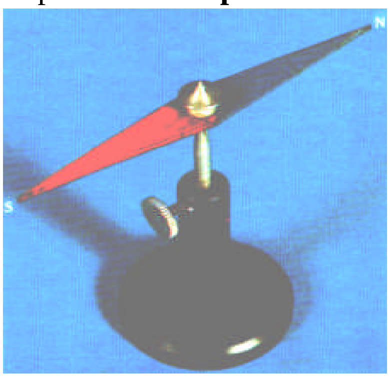
Pezzi di questo minerale di ferro trovati a Magnesia, nell'Asia Minore, furono chiamati *magneti*.

Noi chiamiamo **magnete** o **calamita** o **ago magnetico** ogni corpo che possiede le proprietà della magnetite. A tale proprietà si è dato il nome di **magnetismo**. Si possono costruire anche magneti artificiali. Per esempio, una sbarretta di acciaio può essere magnetizzata avvicinandola ad un pezzo di magnetite. Per magnetizzare artificialmente una sostanza sono in uso diversi metodi:

1. *Magnetizzazione per strofinìo* - Strofinando una sbarra d'acciaio (sempre nello stesso senso) lungo una calamita, la sbarra si magnetizza.
2. *Magnetizzazione per induzione* - Disponendo in vicinanza di un magnete una sbarretta di ferro dolce, questa si magnetizza immediatamente attirando a sua volta altri corpi di ferro. Tuttavia, questa magnetizzazione scompare appena viene allontanato il magnete.

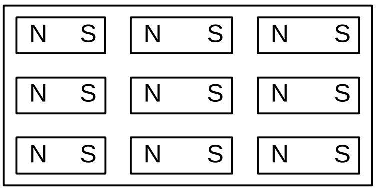
Una calamita può anche venir smagnetizzata; ciò avviene solitamente col tempo, ma si hanno anche metodi più rapidi:

1. *Smagnetizzazione per urto* - Una sbarretta d'acciaio magnetizzata perde ogni traccia di magnetismo se la si batte con un martello, o la si getta a terra violentemente per alcune volte.
2. *Smagnetizzazione per riscaldamento* - Un ago calamitato, posto alla fiamma, perde ogni traccia di magnetismo quando è portato al color rosso. Ciò avviene improvvisamente ad una determinata temperatura detta **punto di Curie** che per l'acciaio è a 769 °C.



E' ben noto che un ago magnetico, libero di ruotare intorno ad un asse verticale, si dispone in modo che una delle due estremità (sempre la stessa) si orienti verso il Nord terrestre e l'altra verso il Sud.

Le due estremità sono chiamate rispettivamente *polo Nord* e *polo Sud*. L'orientazione degli aghi magnetici trova applicazione nelle bussole. Inoltre le calamite interagiscono tra di loro con forze attrattive e repulsive. Poli dello stesso nome si respingono, mentre poli di nome contrario si attraggono.



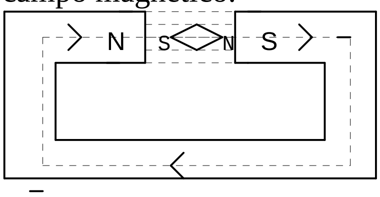
Una notevole differenza esistente tra cariche elettriche e poli magnetici consiste nel fatto che, mentre le cariche elettriche si possono separare da quelle di segno opposto, non altrettanto può farsi con i poli magnetici. L'esperienza insegna che spezzando una calamita, ognuna delle due parti origina altre calamite (*esperienza della calamita spezzata*). Si ritiene, pertanto, che la regione mediana risultava inizialmente neutra solo in apparenza, mentre in realtà mascherava la sovrapposizione di due poli opposti. L'esperienza si può ripetere, con lo stesso risultato, più volte. Questo fatto sperimentale ci suggerisce una prima ipotesi sulla costituzione di un magnete: una calamita è costituita da un insieme di piccoli magneti, detti *magneti elementari* o *magnetoni* tra loro orientati in modo che nell'interno presentano affacciati poli tra loro opposti che si neutralizzano, perciò il magnetismo si manifesta solo alle estremità, cioè ai poli.

2. Il campo magnetico nel vuoto

L'interazione tra due magneti s'interpreta, in analogia alle forze gravitazionali ed elettriche, come azione del campo magnetico generato da un magnete. Ma qui è opportuno mettere subito il luce la differenza essenziale tra i due campi elettrostatico e magnetico: l'azione del campo elettrostatico si manifesta essenzialmente attraverso una forza, mentre quella di un campo magnetico attraverso una coppia di forze.

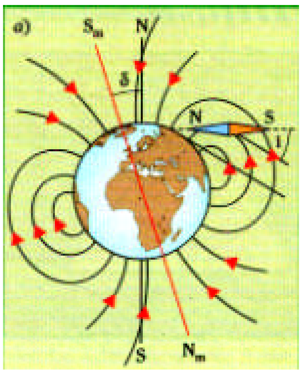
Più in generale, diciamo che in una regione dello spazio è presente un **campo magnetico** tutte le volte che un ago magnetico è soggetto, in quella regione, ad azioni meccaniche. Un ago magnetico, in ogni punto di un campo magnetico, se è libero di ruotare, assume una determinata posizione di equilibrio coincidente con quella in cui il momento della coppia di forze agente è nullo.

Per *convenzione*, come direzione del campo magnetico assumiamo quella retta individuata dai due poli di un ago magnetico in equilibrio in un punto considerato. Inoltre, attribuiamo al campo magnetico il verso Sud-Nord dell'ago. Ponendo una serie di aghetti magnetici in un campo magnetico si può osservare che essi, nella posizione di equilibrio, si dispongono su particolari linee, dette linee di forza del campo magnetico, a cui si attribuisce, per convenzione, lo stesso verso del campo magnetico.

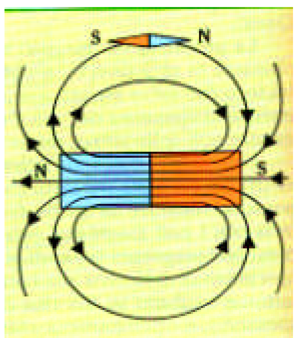


Anche le linee di forza del campo magnetico godono della proprietà che la retta tangente in ogni punto ha la stessa direzione del campo magnetico. Se le linee del campo sono rette parallele, il campo magnetico è *uniforme*. Lo spettro magnetico è una rappresentazione dell'andamento delle linee di forza magnetiche.

Una calamita, avendo due poli opposti, genera un campo magnetico anche all'interno. Infatti il magnete è costituito da tanti magneti elementari le cui linee di forza all'interno si saldano con continuità.

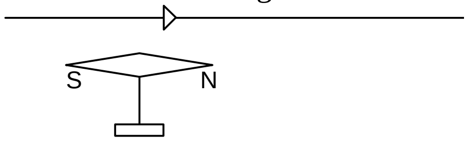


Il fatto che il polo Nord di un ago magnetico sia rivolto verso il Nord terrestre, dimostra che la Terra stessa si comporta come un magnete, i cui poli Nord e Sud si trovano in prossimità dei poli geografici. L'orientazione di un ago si interpreta ammettendo che la Terra genera nello spazio circostante un campo magnetico detto *campo magnetico terrestre*.



3. Effetto magnetico della corrente elettrica

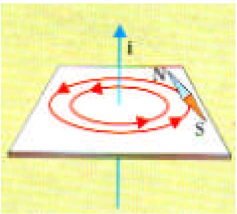
L'elettricità ed il magnetismo si svilupparono indipendentemente l'una dall'altra fino agli inizi del



XIX secolo. Si può immaginare lo stupore che suscitò la scoperta del fisico danese Oersted quando il 21 luglio 1820 annunciò che una corrente elettrica fa deviare un ago magnetico fino a disporlo perpendicolarmente alla linea corrente-ago.

3.a. FILO RETTILINEO

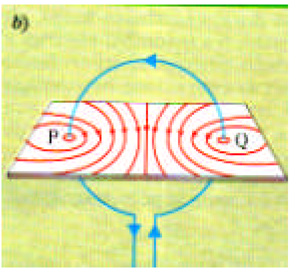
Disponendo su di un cartoncino, piano ed orizzontale, della limatura di ferro, si possono ottenere gli



spettri magnetici. Quindi, un filo rettilineo genera, nello spazio circostante, un campo magnetico. Le linee di forza sono circonferenze concentriche con il centro sul filo. Il verso delle linee di forza si determina con la regola della mano destra: disponendo il pollice nel verso della corrente, le dita della mano danno il verso delle linee di forza.

3.b. SPIRA CIRCOLARE

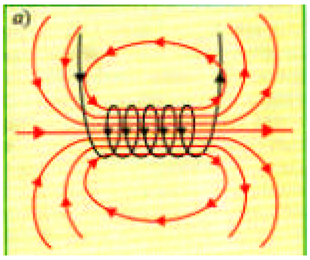
Se il conduttore è a forma di spira, il campo magnetico nel centro è perpendicolare al piano della



spira ed il verso si ottiene sempre con la regola della mano destra dove stavolta il pollice ci dà il verso delle linee di forza. Man mano che ci si avvicina alla spira, le linee di forza tendono ad assumere una forma circolare di raggio decrescente, dovuta al fatto che il campo magnetico generato dall'elemento di filo più vicino prevale sui campi magnetici prodotti dagli altri elementi di filo più lontani. In prossimità della spira perciò il campo magnetico è analogo a quello prodotto da un filo rettilineo. Inoltre si nota che all'interno le linee di forza le linee di forza sono più fitte, mentre all'esterno sono sempre più distanziate, cioè il campo magnetico della spira è più intenso all'interno e meno intenso all'esterno.

3.c. SOLENOIDE O BOBINA.

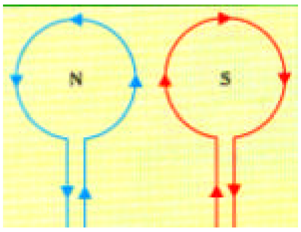
Un solenoide è formato da una serie di spire molto vicine tra loro e realizzate con un unico filo.



All'interno del solenoide, ma non in vicinanza dei suoi bordi, le linee di forza sono, con buona approssimazione, rette parallele, cioè, all'interno, il campo magnetico è uniforme. All'esterno, invece, se il diametro della bobina è molto piccolo rispetto alla lunghezza, il campo magnetico è praticamente nullo. Il verso del campo è analogo a quello prodotto da una spira percorsa da corrente.

4. Azione magnete-corrente

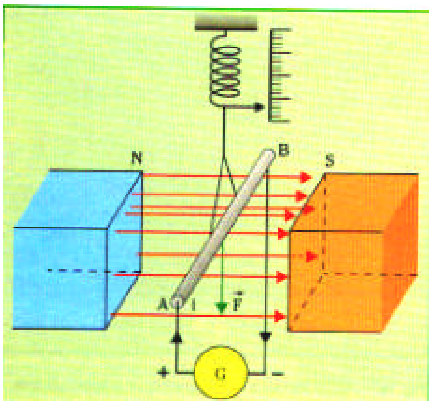
Poichè un filo percorso da corrente esercita azioni meccaniche su di un ago magnetico, un magnete, per il terzo principio della dinamica, deve esercitare sul filo delle forze.



La spira, agli effetti del campo magnetico, si comporta come un magnete i cui poli coincidono con le due facce. Precisamente, un osservatore vede la faccia Nord o quella Sud secondo che per lui la corrente circola in verso antiorario o in verso orario, in accordo con quanto è stato detto in precedenza.

5. Vettore $\vec{B}$

Finora abbiamo considerato la direzione ed il verso del campo magnetico. Vogliamo ora introdurre un vettore avente la direzione ed il verso del campo magnetico e modulo tale che la sua conoscenza



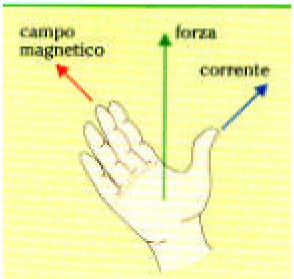
ci permetta di calcolare l'azione meccanica del campo su di un circuito percorso da corrente.

A questo vettore, indicato con $\vec{B}$, diamo il nome di <u>induzione magnetica</u> e talvolta di <u>campo magnetico</u>.

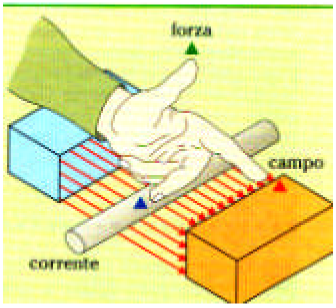
Consideriamo un circuito in cui un conduttore *AB* di lunghezza *l* è immerso in un campo magnetico generato da un magnete del quale sono visibili le due espansioni polari N, S.

Se nel circuito si invia una corrente elettrica di intensità *i*, il conduttore *AB* è soggetto ad una forza $\vec{F}$ diretta verticalmente verso il basso. Tale forza è perpendicolare sia al conduttore percorso da corrente, sia al campo magnetico, cioè al piano formato da questi due ed il suo verso dipende da quello del campo magnetico e della corrente.

Esso si può determinare in due modi:



a) Aprendo la mano destra e tenendo il pollice perpendicolare alle dita, si dispongono queste ultime secondo le linee di forza del campo magnetico ed il pollice secondo il verso della corrente. In queste condizioni, la forza ha il verso della perpendicolare uscente dal palmo della mano (*Regola della mano destra*).



b) Disponendo indice, medio e pollice della mano sinistra perpendicolarmente tra loro con l'indice ed il medio rispettivamente nella direzione del campo magnetico e della corrente, il pollice dà la direzione della forza agente sul conduttore (*Regola della mano sinistra o di Fleming*).

Per un fissato campo magnetico, si trova che il modulo della forza *F* è direttamente proporzionale alla lunghezza *l* del conduttore ed all'intensità *i* di corrente e dipende dall'angolo α formato dalla corrente e dal campo. Detta *B* la costante di proporzionalità, possiamo scrivere:

[1] $$\boxed{F = B\, i\, l\ \operatorname{sen}\alpha}$$

Se $\alpha = 90°$ si ha:

[2] $$F = B\, i\, l.$$

Sperimentalmente si trova che *B* varia solo con il campo magnetico esterno ed in generale per un determinato campo, varia da punto a punto. Per questo motivo assumiamo la grandezza *B* come modulo di un vettore chiamato induzione magnetica, le cui direzioni e versi sono quelli già visti.

Riassumendo:

Definiamo induzione magnetica $\vec{B}$ in un punto il vettore avente la direzione di un ago magnetico nella posizione di equilibrio assunta in quel punto, verso coincidente con quello Sud-Nord dello stesso ago e per modulo la grandezza *B* che compare nella [1].

Risolvendo la [2] rispetto a B si ha:

$$B = \frac{F}{il}$$

da cui si ricava che l'unità di misura dell'induzione magnetica nel sistema S.I. è il $\frac{N}{A \cdot m}$

Precisamente diciamo che in un punto l'induzione magnetica ha il modulo uguale a 1 $\frac{N}{A \cdot m}$ se un conduttore rettilineo di lunghezza 1m e percorso da corrente di 1A è soggetto alla forza di 1N quando viene posto in quel punto perpendicolarmente alla direzione del campo magnetico.

Poichè è :

$$\frac{N}{A \cdot m} = N \cdot \frac{sec}{C} \cdot \frac{1}{m} = N \cdot \frac{sec}{C} \cdot \frac{m}{m^2} = \frac{N \cdot m}{C} \cdot \frac{sec}{m^2} = \frac{J}{C} \cdot \frac{sec}{m^2} = \frac{V \cdot sec}{m^2}$$

posto V· sec = wb (weber), si deduce che l'induzione magnetica nel sistema S.I. può essere espressa in $\frac{wb}{m^2}$.

Oltre a $\frac{N}{A \cdot m}$ molto usata per il campo magnetico è l'unità di misura gauss

$$1 \text{ gauss} = 10^{-4}\ \frac{N}{A \cdot m}$$

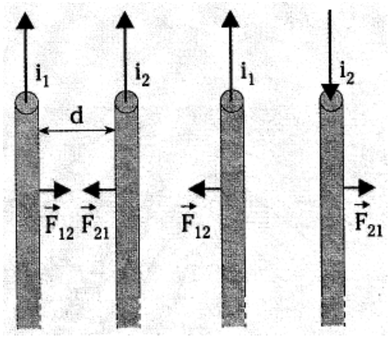
In forma vettoriale la [1] può essere scritta:

$$\vec{F} = i\ \vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

dove $\vec{\ell}$ è il vettore avente direzione e verso della corrente

6. Interazione corrente-corrente

Due conduttori paralleli, percorsi da corrente, interagiscono tra loro con forze attrattive o repulsive



secondo che la corrente percorra i due conduttori nello stesso verso o in versi opposti. Precisamente, dette i_1 ed i_2 le intensità di corrente in due conduttori paralleli di lunghezza ℓ ed a distanza d l'uno dall'altro, si trova sperimentalmente che la forza d'interazione F_{12} è direttamente proporzionale alle intensità ed inversamente proporzionale alla loro distanza. Detta K la costante di proporzionalità, si ha:

$$F = k\frac{i_1\, i_2\, \ell}{d}$$

Nel sistema S.I. si introduce una nuova costante μ_0 detta permeabilità magnetica del vuoto, tale che risulti $K = \frac{\mu_0}{2\pi}$.

Pertanto:

$$\boxed{F = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 i_2 \ell}{d}}$$

Risolvendo rispetto a μ_0 si ha:

$$\mu_0 = 2\pi\frac{d\cdot F}{i_1\, i_2\, \ell}$$

Pertanto, l'unità di misura di μ_0 è:

$$[\mu_0] = \left[\frac{d\cdot F}{i_1 i_2 \ell}\right] = \frac{N\cdot m}{A^2\cdot m} = \frac{N\cdot m}{A\cdot\frac{C}{sec}\cdot m} = \frac{N\cdot m\cdot sec}{A\cdot C\cdot m} = \frac{V\cdot sec}{A\cdot m} = \frac{\Omega\cdot sec}{m} = \frac{henry}{m}$$

dove abbiamo posto $\Omega\cdot$ sec = Henry .

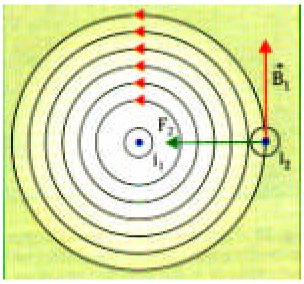
Quindi, il valore di μ_0 è:

$$\mu_0 = 4\pi 10^{-7}\,\frac{\text{henry}}{\text{m}}$$

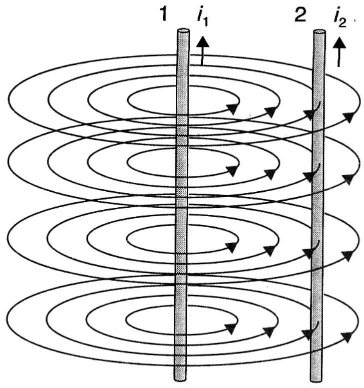
7. Induzione magnetica di alcuni circuiti percorsi da corrente

7.a. FILO RETTILINEO

Abbiamo visto che inviando in un conduttore rettilineo una corrente elettrica, la limatura di ferro si dispone intorno al conduttore formando circonferenze concentriche.



Consideriamo due conduttori rettilinei percorsi da corrente di intensità i_1 ed i_2 entrambe dello stesso verso.



Le circonferenze concentriche sono le linee di forza del campo magnetico generato dalla corrente i_1; di tale campo è rappresentato anche il vettore $\vec{B}_1$ sul filo percorso dalla corrente i_2. La forza agente su questo conduttore è l'azione del campo magnetico generato dalla corrente i_1, cioè del vettore $\vec{B}_1$. Ciascun filo subisce l'azione dell'altro a mezzo del campo magnetico. La corrente i_2 e $\vec{B}_1$ sono perpendicolari tra loro. La forza $\vec{F}_{12}$ che i_1 esercita su i_2 è attrattiva e vale in modulo:

$$F_{12} = B_1 \, i_2 \, \ell$$

dove ℓ è la lunghezza dei due conduttori.

D'altra parte:

$$F_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 \, i_2}{d} l$$

Confrontando le due uguaglianze si ha:

$$B_1 \cancel{i_2} \cancel{l} = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1 \cancel{i_2}}{d}\cancel{l}$$

$\Rightarrow$

$$B_1 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_1}{d}$$

che esprime la legge di Biot-Savart

In modo analogo si trova che:

$$B_2 = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i_2}{d}$$

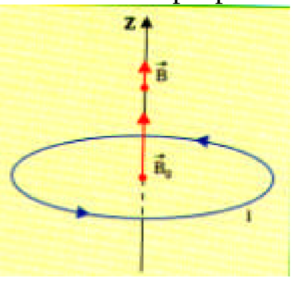
Generalizzando il risultato (valido anche se le correnti nei due conduttori hanno versi opposti) otteniamo:

$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{i}{r}}$$

cioè ***nel conduttore rettilineo, il campo magnetico prodotto da esso in un punto P dello spazio distante r, è direttamente proporzionale all'intensità di corrente che circola in esso ed inversamente proporzionale alla distanza del punto dal filo.***

7.b. SPIRA CIRCOLARE (LEGGE DI LAPLACE):

L'intensità del vettore induzione magnetica nel centro di una spira circolare percorsa da corrente è direttamente proporzionale all'intensità di corrente ed inversamente proporzionale al raggio della spira.



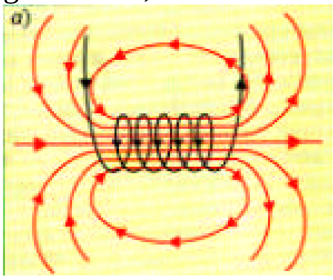
$$\boxed{B = \frac{\mu_0}{2}\frac{i}{R}}$$

In un punto dell'asse avente una distanza z dal centro vale la formula:

$$B = \frac{\mu_0}{2}\frac{ir^2}{\left(r^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

7.c. SOLENOIDE

Se il diametro della spira è molto piccolo rispetto alla lunghezza del solenoide, il campo magnetico generato è, con buona approssimazione, uniforme all'interno in punti, però, lontani dalle due estremità, mentre all'esterno è tanto piccolo da ritenersi trascurabile.



Se N è il numero totale di spire ed ℓ è la lunghezza del solenoide, si dimostra che nella regione del campo uniforme l'induzione magnetica è:

$$\boxed{B = \mu_0 \frac{N}{\ell} i}$$

cioè ***essa è direttamente proporzionale al numero totale di spire ed all'intensità di corrente ed inversamente proporzionale alla lunghezza del solenoide***. Indicando con n il numero di spire per unità di lunghezza cioè $n = \frac{N}{l}$, la precedente relazione diventa:

$$\boxed{B = \mu_0\, n\, i}$$

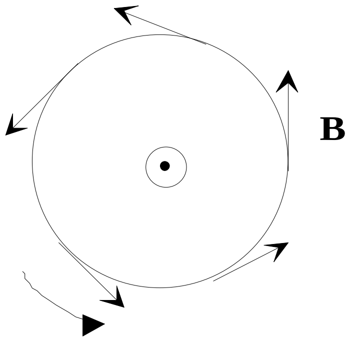
cioè ***l'induzione è direttamente proporzionale all'intensità di corrente ed al numero di spire per unità di lunghezza.***

8. Teorema della circuitazione di Ampère

Ricordiamo che un campo vettoriale V è conservativo se la circuitazione $\oint_C \vec{V} \bullet d\vec{s}$ è nulla.

Per poter stabilire se il vettore induzione magnetica è conservativo o meno procediamo al calcolo della sua circuitazione, considerando un filo rettilineo indefinito percorso da corrente e assumendo come linea chiusa una linea di forza del campo magnetico. Fissato su questa linea un verso positivo di percorrenza che può essere quello del campo magnetico, facciamo la convenzione di assumere positiva l'intensità di corrente nel caso in cui il campo magnetico generato da essa è concorde con il verso positivo scelto; altrimenti attribuiamo alla corrente un segno negativo.

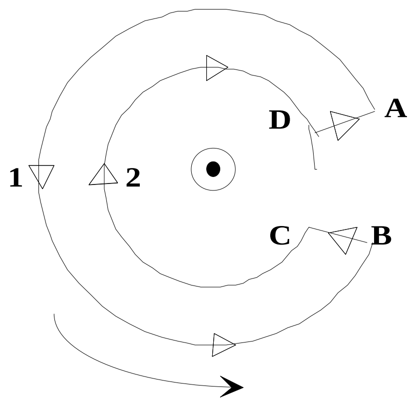
In figura il filo e la linea sono visti dall'alto; il campo magnetico è diretto tangenzialmente alla linea di forza; inoltre per la legge di Biot-Savart, il modulo è sempre lo stesso perché non varia né la corrente e né la distanza dal filo. Dividendo il percorso in tanti spostamenti infinitesimi ds_1 , ds_2 , …. , ds_n ed osservando che, essendo gli spostamenti sufficientemente piccoli, il vettore **B** è parallelo ed equiverso ad essi (e quindi **B** · d**s** = B ds) la circuitazione dell'induzione magnetica è:



$$\oint_C \vec{B}\,d\vec{s} = \oint_C B ds = B \oint_C ds = B 2\pi r = \frac{\mu_0\, i}{\cancel{2\pi}\, \cancel{r}} \cancel{2\pi}\cancel{r} = \mu_0\, i$$

La corrente che attraversa la superficie delimitata dalla linea chiusa lungo la quale si è calcolata la circuitazione, si dice concatenata con la linea. La formula, dimostrata per un cammino chiuso coincidente con una linea di forza del campo magnetico, è valida per percorsi chiusi di forma qualsiasi, purché la corrente sia concatenata con essi.

Pertanto, la circuitazione dell'induzione magnetica lungo un percorso chiuso, con il quale risulta concatenata la corrente che genera il campo, è sempre uguale al prodotto della permeabilità magnetica per l'intensità di corrente, qualunque sia la forma geometrica del percorso chiuso.



Calcoliamo ora la circuitazione del campo magnetico generato sempre da un filo rettilineo percorso da corrente lungo la linea chiusa rappresentata in figura.

Questa linea è formata dagli archi di circonferenza 1 e 2 rispettivamente di estremi A,B e C,D e dai segmenti BC e DA; sulla figura è anche indicato il verso di percorrenza della linea assunto come positivo. Supponiamo inoltre che gli archi CD e BA siano talmente piccoli da potersi trascurare, sicché gli archi 1 e 2 possono approssimarsi a delle circonferenze complete.

La circuitazione di B lungo la circonferenza 2 è negativa, in quanto gli spostamenti sono opposti al campo magnetico. Il contributo della circuitazione dato dai due spostamenti BC e DA è nullo in quanto essi formano con il campo magnetico un angolo di 90°.

Pertanto avremo:

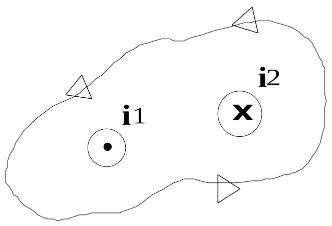
$$\oint_{C} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \oint_{C_1} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \oint_{C_2} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \oint_{DA} \vec{B}\cdot d\vec{s} + \oint_{CB} \vec{B}\cdot d\vec{s} = \mu_0 i - \mu_0 i = 0$$

Si osservi che la corrente in questo caso non è concatenata con il cammino chiuso considerato, in quanto non attraversa la superficie racchiusa dal cammino.

I risultati trovati possono essere generalizzati anche al campo magnetico generato da più correnti.

Vale in ogni caso il **teorema della circuitazione di Ampère**:

La circuitazione dell'induzione magnetica, calcolata lungo un cammino chiuso qualsiasi, è uguale al prodotto della permeabilità magnetica per la somma delle correnti concatenate col cammino considerato, assumendo i segni delle correnti secondo la convenzione precisata.



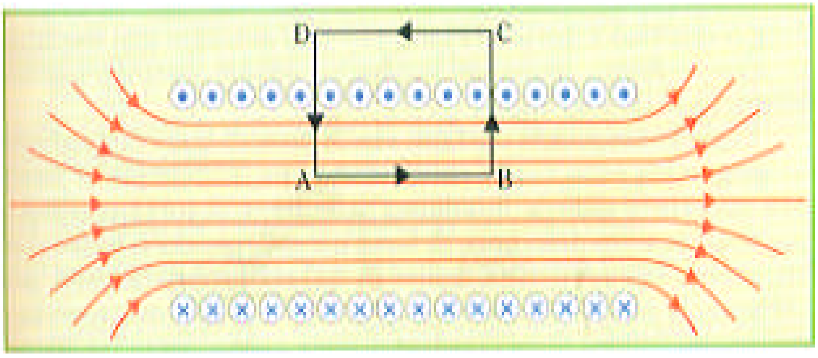
Per esempio, per il percorso chiuso della figura accanto, la corrente uscente dal foglio è positiva, perché il campo magnetico generato è concorde con il verso di percorrenza, mentre la i_2, che ha verso entrante verso il foglio è negativa. Se in particolare le due correnti hanno lo stesso valore assoluto, la circuitazione è nulla.

E' importante osservare la differenza tra campo elettrico e induzione magnetica: il campo elettrico ha la circuitazione sempre nulla ed è perciò un campo conservativo; l'induzione magnetica, invece, ha la circuitazione non sempre nulla e pertanto non risulta conservativa.

8.a. APPLICAZIONE

Per mezzo del teorema di Ampere si può calcolare l'induzione magnetica di un solenoide avente n spire per unità di lunghezza, in cui passa una corrente di intensità i.

Applichiamo il teorema della circuitazione al percorso chiuso costituito dal perimetro del rettango*lo* ABCD.



Il contributo alla circuitazione lungo il lato CD esterno è nullo, essendo trascurabile l'induzione magnetica; la stessa cosa può dirsi del contributo lungo i lati BC e DA, essendo questi perpendicolari al vettore **B** ($\cos\theta = 0$**).**

Pertanto la circuitazione di **B** è solo quella lungo il lato AB interno al solenoide e parallelo alle linee del campo.

Se *l* è la lunghezza di AB, tenendo conto che **B** è parallelo ed equiverso rispetto allo spostamento AB, la circuitazione risulta:

$$\oint_{ABCD} \vec{B}.\cdot d\vec{s} = \oint_{AB} Bds = Bl$$

D'altra parte, se indichiamo con N il numero di spire del solenoide che attraversano la superficie del rettangolo, la corrente totale concatenata con il cammino chiuso considerato è *Ni*. Per il teorema della circuitazione si ha pure:

$$\oint_{ABCD} \vec{B}\, d\vec{s} = \mu_0 N i$$

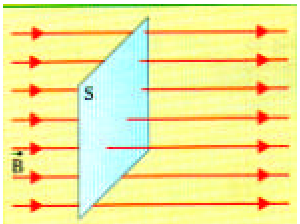
Dal confronto si ottiene il modulo dell'induzione magnetica all'interno del solenoide:

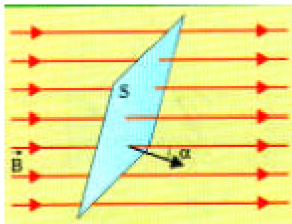
$$B = \mu_0 \frac{N}{l} i$$

Indicando con n il numero di spire per unità di lunghezza, cioè posto n = N/*l*, la precedente diventa:

$$B = \mu_0 n i$$

9. Flusso dell'induzione magnetica





In analogia con il flusso del campo elettrico, data una superficie *S* qualsiasi di un campo magnetico il cui vettore induzione è $\vec{B}$, può essere definito il flusso del vettore $\vec{B}$ attraverso la superficie *S*.
Se la superficie *S* è piana ed il campo magnetico è uniforme, detto α l'angolo che che il versore normale alla superficie forma con $\vec{B}$, il flusso di $\vec{B}$ attraverso *S* è dato da:

$$\Phi_S(\vec{B}) = B\ S\ \cos\alpha$$

Se la superficie S è perpendicolare al campo magnetico, poichè $\alpha = 0$ e $\cos\alpha = 1$, si ha:

$$\Phi_S(\vec{B}) = B\ S$$

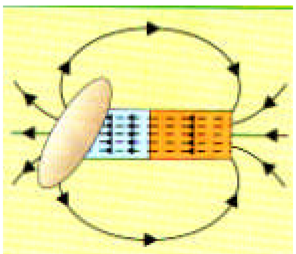
Nel caso generale in cui la superficie *S* non è piana ed il campo magnetico non è uniforme, è necessario suddividere *S* in tanti elementi infinitesimi ΔS_i , calcolare attraverso ogni elemento il flusso (in questo caso essendo ΔS_i molto piccolo il campo $\vec{B}_i$ può essere considerato con buona approssimazione uniforme) e sommare tutti i flussi, ottenendo:

$$\Phi_S(\vec{B}) = \sum_{i=1}^{n} \Phi_{\Delta Si}\ (\vec{B}_i)$$

L'unità di misura del flusso nel S.I. è:

$$[\Phi] = [B \cdot S] = \frac{wb}{\cancel{m}^2} \cdot \cancel{m}^2 = wb$$

Il flusso è direttamente proporzionale alle linee di forza che attraversano la superficie. Mentre le

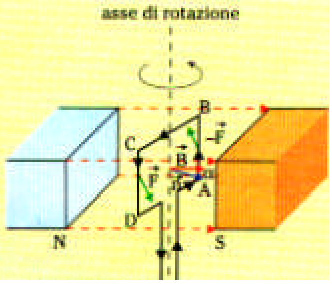


linee di forza del campo elettrico iniziano sulle cariche positive e terminano su quelle negative, le linee di forza del campo magnetico non hanno nè una origine e nè una fine e, quindi, sono linee chiuse. La conseguenza è che, comunque si tracci una superficie chiusa, il numero di linee di forza entranti è uguale al numero di linee di forza uscenti, per cui il flusso di $\vec{B}$ attraverso la superficie considerata è nullo.
Possiamo perciò concludere enunciando <u>il teorema di Gauss</u> per il magnetismo:
Il flusso dell'induzione magnetica attraverso una superficie chiusa è sempre nullo, qualunque sia il campo magnetico e qualunque sia la superficie:

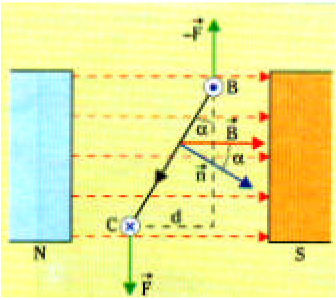
$$\Phi_{S\ chiusa}\ (\vec{B}) = 0.$$

10. Momento torcente

Consideriamo una spira rigida conduttrice a forma rettangolare immersa in un campo magnetico uniforme, come quello generato da un magnete di cui sono visibili i poli N e S in figura.



La spira è percorsa da corrente di intensità *i* ed è libera di ruotare intorno ad un asse verticale. Sui lati *AB* e *CD* il campo esercita due forze che formano una coppia. Detta *a* la lunghezza del lato *AB* = *CD*, l'intensità delle due forze che formano la coppia è uguale ad $F = i\ a\ B$. Le forze agenti sui lati *BC* ed *AD* sono due vettori opposti che giacciono nel piano della spira e quindi non producono alcun effetto sul movimento.



Per calcolare il momento meccanico della coppia, chiamato **momento torcente**, consideriamo la spira ed il magnete visti dall'alto: la corrente esce da *B* ed entra in *C*. Indichiamo con α l'angolo che la normale $\vec{n}$ al piano della spira (orientata secondo il verso piedi-testa di un osservatore disposto perpendicolarmente alla spira, in modo che veda circolare la corrente in senso antiorario) forma con il vettore $\vec{B}$. Il braccio della coppia è:

$$d = b \cos(90° - \alpha) = b \operatorname{sen}\alpha$$

Il momento torcente è dato, dunque, da:

$$M = F\ d = i\ a\ B\ b \operatorname{sen}\alpha$$

Poichè *a b* è l'area racchiusa dalla spira di forma rettangolare avremo:

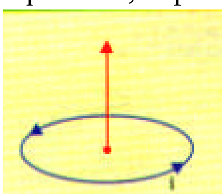
$$\boxed{M = i\ S\ B \operatorname{sen}\alpha}$$

La precedente è valida qualunque sia la forma della spira. Poichè la spira è in equilibrio quando *M=0*, deduciamo che esistono due posizioni di equilibrio, soluzioni dell'equazione $\operatorname{sen}\alpha = 0$:

1) $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}\ //\ \vec{B}$

2) $\alpha = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{n}\ //\ -\vec{B}$

In entrambi i casi la spira sta nel piano perpendicolare al campo magnetico. Delle due posizioni di equilibrio, si può dimostrare che la prima è stabile, mentre la seconda è instabile.



Il momento torcente dipende dalle proprietà della spira (S, i), dall'induzione $\vec{B}$ e dall'angolo α. Questa considerazione suggerisce l'opportunità di introdurre un vettore $\vec{m}$ chiamato *momento magnetico della spira*, avente modulo $i \cdot S$, direzione perpendicolare al piano della spira e verso coincidente con quello di $\vec{n}$.

Pertanto:

$$M = m\ B \operatorname{sen}\alpha \qquad \vee \qquad M = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

11. Forza di Lorentz

Consideriamo un tratto di conduttore di sezione S e lunghezza ℓ attraversato da una corrente di intensità *i*. La forza che un campo $\vec{B}$ esercita su di esso è data, come abbiamo visto, da:

$$\vec{F} = i\,\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Tenendo presente che:

$$i = -\frac{e}{t}$$

possiamo affermare che:

$$\vec{F} = -\frac{e}{t}\vec{\ell} \times \vec{B}$$

Pertanto, su un elettrone in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto ad un campo magnetico agisce la forza:

$$\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$$

Più in generale, su una carica *q* in moto con velocità $\vec{v}$ rispetto ad un campo magnetico agisce la forza, detta **forza di Lorentz**:

$$\boxed{\vec{F} = q\vec{v}_d \times \vec{B}}$$

Detto α l'angolo formato dal vettore $\vec{v}$ con $\vec{B}$, il modulo di $\vec{F}$ è:

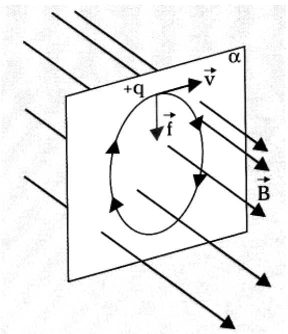
$$F = q\,v\,B\,\mathrm{sen}\alpha$$

La forza è nulla se e solo se $v = 0$ cioè se la carica è ferma, oppure $\mathrm{sen}\alpha = 0$ cioè la velocità della carica è parallela al campo $\vec{B}$. Pertanto possiamo dire che ***un campo magnetico non esercita alcuna forza nè su di una carica elettrica in quiete, nè su di una carica elettrica che si muove nella stessa direzione del campo elettrico***. Se $\alpha = 90°$ la forza avrà il valore massimo $F = q\,v\,B$.

12. Moto di una carica elettrica in un campo magnetico uniforme

La forza di Lorentz agente su una carica q in moto in un campo elettrico è, secondo la formula citata, perpendicolare a $\vec{v}$ ed a $\vec{B}$.

Essendo $\vec{F} \perp \vec{v}$, il lavoro complessivo è nullo; di conseguenza l'energia cinetica non varia, cioè la velocità si mantiene costante in modulo. Pertanto la carica elettrica si muove di moto uniforme. Il campo magnetico ha, dunque, solo l'effetto di incurvare la traiettoria. Per questo motivo, la forza magnetica si chiama anche <u>*forza deflettente*</u>.



Consideriamo una carica $+q$ iniettata con velocità $\vec{v}$ perpendicolare a $\vec{B}$. La forza di Lorentz è normale alla velocità, diretta come in figura ed ha per modulo $q\,v\,B$.

La carica elettrica acquista un'accelerazione normale alla velocità, cioè centripeta.

Indicando con *m* la massa della carica, possiamo scrivere:

$$F = m\,a$$

$$q\,v\,B = m\,\frac{v^2}{r}$$

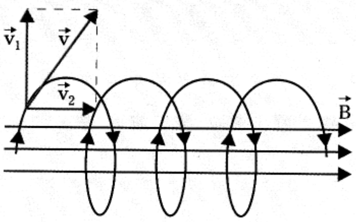
$$r = \frac{m v^{\cancel{2}}}{q \cancel{v} B} = \frac{m v}{q B}$$

Poichè le grandezze al secondo membro sono tutte costanti, deduciamo che il raggio non varia. Pertanto, la carica si muove di *moto circolare uniforme* nel piano perpendicolare alla direzione di $\vec{B}$

Se la velocità con cui la carica viene immessa nel campo magnetico ha una componente $\vec{v}_2$ nella direzione di $\vec{B}$, si ottiene un moto elicoidale.

La particella, infatti, mentre ruota per effetto della componente $\vec{v}_1$, trasla nella direzione di $\vec{B}$ per effetto di $\vec{v}_2$.

Il moto di traslazione è rettilineo uniforme in quanto $\vec{B}$ non modifica $\vec{v}_2$.



Il moto è, pertanto, la composizione di un moto circolare uniforme nel piano perpendicolare a $\vec{B}$ con un moto rettilineo uniforme nella direzione di $\vec{B}$ cioè un *moto elicoidale*.